Definición de la integral de Lebesgue para funciones medibles positivas (una unidad del curso "Análisis Real")

Egor Maximenko
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

4 de junio de 2021

Objetivos:

- definir la integral de Lebesgue para funciones medibles positivas;
- demostrar algunas de sus propiedades elementales.

Prerrequisitos:

- la integral de Lebesgue para funciones simples medibles positivas,
- el supremo de un subconjunto de $[-\infty, +\infty]$,
- la imagen de una función, propiedades de las imágenes;

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$,

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$,
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f\,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\displaystyle\int_X^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\displaystyle\int_X^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\displaystyle\int_X^{(3)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$,
- $\displaystyle\int_X^{(4)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\displaystyle\int_X^{(2)} |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

En esta clase definiremos $\displaystyle\int_X^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Plan

Plan

1. Repaso
2. Definición de la integral de funciones positivas medibles
3. La integral sobre un subconjunto

Definición de la integral para funciones simples medibles positivas, repaso

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^{m} v_j \, 1_{P_j}.$$

Definimos

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{m} v_j \, \mu(P_j).$$

También denotamos esta integral por $\displaystyle\int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu$.

Propiedad monótona de $\int^{(1)}$ respecto a la función, repaso

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que $f \leq g$. Entonces

Propiedad monótona de $\int^{(1)}$ respecto a la función, repaso

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu.$$

Propiedad homogénea de $\int^{(1)}$, repaso

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $\lambda \in [0, +\infty)$. Entonces

Propiedad homogénea de $\int^{(1)}$, repaso

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $\lambda \in [0, +\infty)$. Entonces

$$\int_X^{(1)} (\lambda f)\, \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X^{(1)} f\, \mathrm{d}\mu.$$

La integral sobre un conjunto, repaso

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mu)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu :=$$

La integral sobre un conjunto, repaso

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mu)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_X^{(1)} f|_A \, \mathrm{d}\mu.$$

La integral sobre un conjunto, repaso

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mu)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu := \int_X^{(1)} f|_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Proposición

$$\int_A^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu =$$

La integral sobre un conjunto, repaso

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mu)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu := \int_X^{(1)} f|_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Proposición

$$\int_A^{(1)} f \,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} f \, 1_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Propiedad monótona de la imagen, repaso

Proposición

Sea $\varphi\colon P \to Q$ y sea $R, S \subseteq P$, $R \subseteq S$. Entonces

$$\varphi[P] \subseteq \varphi[Q].$$

Propiedad monótona del supremo, repaso

Proposición

Sean $P, Q \subseteq [-\infty, +\infty]$ tales que $P \subseteq Q$. Entonces

$$\sup(P) \leq \sup(Q).$$

Plan

Definición de $\int f$ para f positiva

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\mathcal{L}_f := \Big\{ g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \colon \; g \le f \Big\}.$$

Definición de $\int f$ para f positiva

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\mathcal{L}_f := \Big\{ g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \colon \;\; g \le f \Big\}.$$

Definimos $J \colon \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \to [0, +\infty]$,

$$J(g) := \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu.$$

Definición de $\int f$ para f positiva

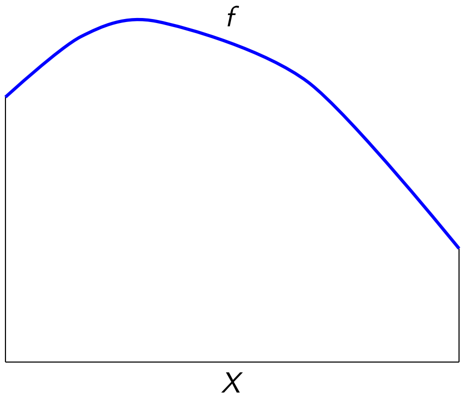
Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\mathcal{L}_f := \left\{ g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \colon \ g \le f \right\}.$$

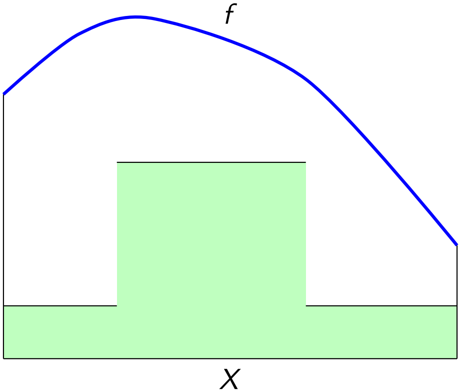
Definimos $J \colon \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \to [0, +\infty]$,

$$J(g) := \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu.$$

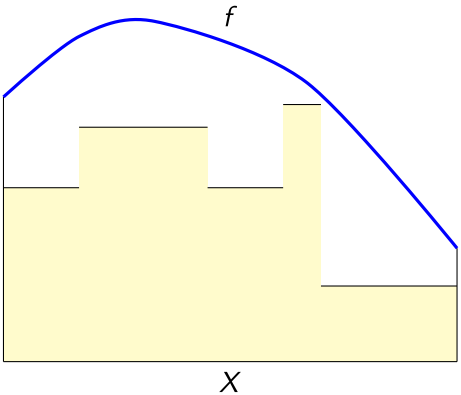
$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \sup(J[\mathcal{L}_f]) = \sup \left\{ \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu \colon \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \le f \right\}.$$



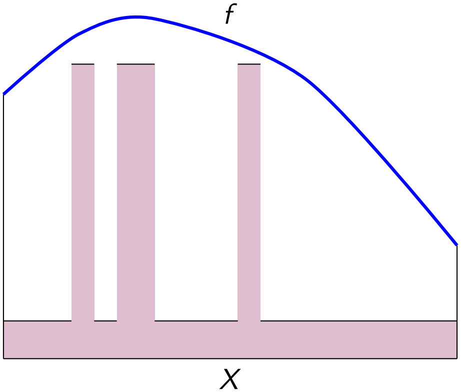
$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$



$$\int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_X^{(1)} g\,\mathrm{d}\mu\colon\quad g\in\mathcal{SM}(X,\mathcal{F},[0,+\infty)),\quad g\le f\right\}.$$



$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \le f \right\}.$$



$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu : \quad g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$

$\int^{(2)}$ es una extensión de $\int^{(1)}$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

$\int^{(2)}$ es una extensión de $\int^{(1)}$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Como f es simple y $f \leq f$, tenemos

$\int^{(2)}$ es una extensión de $\int^{(1)}$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Como f es simple y $f \leq f$, tenemos $f \in \mathcal{L}_f$.

Para cada g en $\mathcal{L}_f$ tenemos $g \leq f$ y por eso

$\int^{(2)}$ es una extensión de $\int^{(1)}$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Como f es simple y $f \le f$, tenemos $f \in \mathcal{L}_f$.

Para cada g en $\mathcal{L}_f$ tenemos $g \le f$ y por eso $J[g] \le J[f]$.

Conclusión: $J[f]$ es el máximo elemento de $J[\mathcal{L}_f]$.

Notación: funciones positivas Lebesgue-integrables

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty]) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]) \colon \quad \int_X f \, \mathrm{d}\mu < +\infty \right\}.$$

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos $\mathcal{L}_f$ y $\mathcal{L}_g$:

$$\mathcal{L}_f \qquad \mathcal{L}_g.$$

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos $\mathcal{L}_f$ y $\mathcal{L}_g$:

$$\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_g.$$

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos $\mathcal{L}_f$ y $\mathcal{L}_g$:

$$\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_g.$$

Por eso

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos $\mathcal{L}_f$ y $\mathcal{L}_g$:

$$\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_g.$$

Por eso $J[\mathcal{L}_f] \subseteq J[\mathcal{L}_g]$ y

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \le g$. Entonces

$$\int_X f \, \mathrm{d}\mu \le \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos $\mathcal{L}_f$ y $\mathcal{L}_g$:

$$\mathcal{L}_f \ \subseteq \mathcal{L}_g.$$

Por eso $J[\mathcal{L}_f] \subseteq J[\mathcal{L}_g]$ y

$$\sup(J[\mathcal{L}_f]) \le \sup(J[\mathcal{L}_f]).$$

La propiedad homogénea de la integral de funciones positivas

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $\lambda \in [0, +\infty)$. Entonces

$$\int_X \lambda f \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

Idea de demostración de la propiedad homogénea

El caso $\lambda = 0$ es trivial. Consideremos el caso $\lambda > 0$.

Idea de demostración de la propiedad homogénea

El caso $\lambda = 0$ es trivial. Consideremos el caso $\lambda > 0$.

Primero justificar que

$$h \in \mathcal{L}_{\lambda f} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists g \in \mathcal{L}_f \quad h = \lambda g.$$

Luego usar la propiedad homogénea de J y demostrar que

$$J[\mathcal{L}_{\lambda f}] = \lambda\, J[\mathcal{L}_f].$$

Observación sobre la propiedad aditiva (la demostraremos despues)

En una de las clases futuras demostraremos el teorema de la convergencia monótona y con ayuda de ese teorema podremos demostrar la propiedad aditiva de $\int_X^{(2)}$:

$$\int_X^{(2)} (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu + \int_X^{(2)} g\,\mathrm{d}\mu.$$

Aproximaremos f y g por sucesiones crecientes de funciones simples medibles positivas y aplicaremos el teorema de la convergencia monótona.

Desgraciadamente, la definición de $\int_X^{(2)}$ no es cómoda para demostrar la propiedad aditiva de manera directa.

Plan

Un subespacio de un espacio de medida, repaso

Proposición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Pongamos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F} : \quad B \subseteq A\}, \qquad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

La restricción de una función medible es medible, repaso

Proposición

Sean $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible, $A \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Entonces $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty])$.

Definición de la integral sobre un conjunto medible

Definición

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu := \int_X^{(2)} f|_A \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Fórmula para la integral sobre un conjunto

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X 1_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Fórmula para la integral sobre un conjunto

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X 1_A f \, \mathrm{d}\mu.$$

Ya sabemos que esta propiedad se cumple para $\int^{(1)}$.
Ahora la vamos a demostrar para $\int^{(2)}$.

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f\big|_A,$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \qquad \mathcal{L}_{f_A} := \{s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \colon \ s \leq f_A\}.$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \qquad \mathcal{L}_{f_A} := \{s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \colon \ s \le f_A\}.$$

$$J_A \colon \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \to [0, +\infty], \qquad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \qquad \mathcal{L}_{f_A} := \{s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)\colon\ s \le f_A\}.$$

$$J_A\colon \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \to [0, +\infty], \qquad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \qquad \mathcal{L}_{f_A} := \{s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty) \colon\ s \le f_A\}.$$

$$J_A \colon \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \to [0, +\infty], \qquad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \,\mathrm{d}\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f \,\mathrm{d}\mu = \sup(J_A(\mathcal{L}_{f_A})),$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \qquad \mathcal{L}_{f_A} := \{s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0,+\infty)\colon\ s \le f_A\}.$$

$$J_A\colon \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0,+\infty)) \to [0,+\infty], \qquad J_A(s) := \int_A^{(1)} s\,\mathrm{d}\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu = \sup(J_A(\mathcal{L}_{f_A})), \qquad \int_X^{(2)} f\,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \qquad \mathcal{L}_{f_A} := \{s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)\colon \ s \le f_A\}.$$

$$J_A \colon \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \to [0, +\infty], \qquad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \sup(J_A(\mathcal{L}_{f_A})), \qquad \int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \sup(J(\mathcal{L}_{1_A f})).$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \qquad \mathcal{L}_{f_A} := \{ s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty) \colon \ s \le f_A \}.$$

$$J_A \colon \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \to [0, +\infty], \qquad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, \mathrm{d}\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \sup(J_A(\mathcal{L}_{f_A})), \qquad \int_X^{(2)} f \, \mathrm{d}\mu = \sup(J(\mathcal{L}_{1_A f})).$$

Vamos a demostrar que $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) = J(\mathcal{L}_{1_A f})$.

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.
Definimos $g\colon X \to [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $s = g|_A$,

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.
Definimos $g\colon X \to [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A\, g = g$,

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g\colon X \to [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A\, g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$.

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.
Definimos $g\colon X \to [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A\, g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v =$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.
Definimos $g\colon X \to [0,+\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A\, g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v = J_A(s) =$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.
Definimos $g\colon X \to [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A\, g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v \;=\; J_A(s) \;=\; \int_A^{(1)} s \,\mathrm{d}\mu_A \;=$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.
Definimos $g\colon X \to [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A\, g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v = J_A(s) = \int_A^{(1)} s \,\mathrm{d}\mu_A = \int_X^{(1)} 1_A\, g \,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \subseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J_A(\mathcal{L}_{f_A})$. Encontramos s en $\mathcal{L}_{f_A}$ tal que $v = J_A(s)$.
Definimos $g\colon X \to [0,+\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Entonces es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A\, g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v \;=\; J_A(s) \;=\; \int_A^{(1)} s \,\mathrm{d}\mu_A \;=\; \int_X^{(1)} 1_A\, g \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_X^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu \;\in\; J[\mathcal{L}_{1_A f}].$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$.

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \le 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) =$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$.

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s =$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \le 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \le 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g\big|_A.$$

Entonces $s \le f_A$ y

$v =$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \le 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g\big|_A.$$

Entonces $s \le f_A$ y

$$v \;=\; J(g) \;=$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \le 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g\big|_A.$$

Entonces $s \le f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \le 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces $s \le f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} 1_A \, g \, \mathrm{d}\mu =$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \le 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces $s \le f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} 1_A \, g \,\mathrm{d}\mu = \int_A^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu =$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \le 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces $s \le f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} 1_A\, g \,\mathrm{d}\mu = \int_A^{(1)} g \,\mathrm{d}\mu = \int_A^{(1)} s \,\mathrm{d}\mu_A \in$$

Demostración, $J_A(\mathcal{L}_{f_A}) \supseteq J(\mathcal{L}_{1_A f})$

Sea $v \in J(\mathcal{L}_{1_A f})$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \le 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \qquad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g\big|_A.$$

Entonces $s \le f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu = \int_X^{(1)} 1_A \, g \, \mathrm{d}\mu = \int_A^{(1)} g \, \mathrm{d}\mu = \int_A^{(1)} s \, \mathrm{d}\mu_A \in J_A(\mathcal{L}_{f_A}).$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Aplicamos la proposición anterior y la monotonía de la integral respecto a la función:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \ =$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Aplicamos la proposición anterior y la monotonía de la integral respecto a la función:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \; = \; \int_X 1_A \, f \, \mathrm{d}\mu \; \leq$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Aplicamos la proposición anterior y la monotonía de la integral respecto a la función:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \;=\; \int_X 1_A \, f \, \mathrm{d}\mu \;\leq\; \int_X 1_B \, f \, \mathrm{d}\mu \;=$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Aplicamos la proposición anterior y la monotonía de la integral respecto a la función:

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_X 1_A f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_X 1_B f \, \mathrm{d}\mu = \int_B f \, \mathrm{d}\mu.$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$, $b \in [0, +\infty)$.

Supongamos que $f(x) = b$ para cada x en A.

Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = b \, \mu(A).$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$, $b \in [0, +\infty)$.

Supongamos que $f(x) = b$ para cada x en A.

Entonces
$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = b\,\mu(A).$$

Idea de demostración. $f\,1_A =$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$, $b \in [0, +\infty)$.

Supongamos que $f(x) = b$ para cada x en A.

Entonces
$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = b \, \mu(A).$$

Idea de demostración. $f \, 1_A = b \, 1_A$.

La integral de una función que se anula en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = 0$ para cada x en A. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial.

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial.

Sea $\mu(A) > 0$.

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial.

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v\,1_A \in$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial.

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v \, 1_A \in \mathcal{L}_{f \, 1_A}$.

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A. Entonces

$$\int_A f \, \mathrm{d}\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial.

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v\, 1_A \in \mathcal{L}_{f\, 1_A}$.

$$\sup(J[f\, 1_A]) \geq \sup_{v \in [0,+\infty)} \int_X^{(1)} v\, 1_A \, \mathrm{d}\mu.$$