Estructura de sucesiones decrecientes de conjuntos

Objetivos. Estudiar la estructura de las sucesiones decrecientes de conjuntos.

Requisitos. Sucesiones crecientes de conjuntos, el principio de inducción, propiedades de operaciones con conjuntos.

En el tema anterior, estudiamos la estructura de sucesiones crecientes de conjuntos. Demostramos el siguiente resultado.

1 Proposición (sobre una sucesión creciente de conjuntos y la sucesión de sus diferencias sucesivas)**.** *Sea* $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión creciente de conjuntos que empieza con el conjunto vació:*

$$\varnothing = P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \subseteq P_3 \subseteq \ldots$$

Denotamos por $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ *la sucesión de sus diferencias sucesivas:*

$$\forall n \in \{1, 2, \ldots\} \qquad Q_n := P_n \setminus P_{n-1}.$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. *Los conjuntos* Q_n *son disjuntos a pares.*
2. *Para todo* n *en* $\mathbb{N}$, $\quad P_n = \bigcup_{k=1}^{n} Q_k$.
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$.

Vamos a estudiar la estructura de sucesiones decrecientes de conjuntos. Para demostrar el resultado principal (Proposición 3), necesitamos un lema.

2 Lema (sobre una sucesión decreciente de conjuntos y los índices de pertenencia)**.** *Sean* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión decreciente de conjuntos,* $k \in \mathbb{N}$, $x \in A_k$. *Denotemos por* J *al conjunto de los índices* n *tales que* $x \in A_n$*:*

$$J := \Big\{ n \in \mathbb{N}\colon\ x \in A_n \Big\}.$$

Supongamos que $J \neq \mathbb{N}$. *Entonces existe un* p *en* $\mathbb{N}$ *tal que* $p \geq k$ *y*

$$J = \{1, \ldots, p\}.$$

Idea de demostración. Como $J \neq \mathbb{N}$, tenemos $\mathbb{N} \setminus J \neq \varnothing$. Por el principio de buen orden, el conjunto $\mathbb{N} \setminus J$ tiene un elemento mínimo. Denotemos su elemento mínimo por q. Usando la hipótesis que $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente se puede demostrar que $J = \{1, \ldots, q-1\}$. $\square$

3 Proposición (sobre una sucesión decreciente de conjuntos y la sucesión de sus diferencias sucesivas)**.** *Sea* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión decreciente de conjuntos:*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$$

Denotamos por $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ *la sucesión de sus diferencias y por* C *la intersección de la sucesión original:*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad D_n \coloneqq A_n \setminus A_{n+1},$$

$$C \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. *Los conjuntos* D_n *son disjuntos a pares.*

2. *Para todo* n *en* $\mathbb{N}$, $D_n \cap C = \varnothing$.

3. *Para todo* k *en* $\mathbb{N}$,

$$A_k = C \cup \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} D_n \right). \tag{1}$$

Dejamos la demostración de los incisos 1 y 2 como ejercicios simples.

Demostración del inciso 3, usando el Lema 2. Como $C \subseteq A_k$ y $D_k = A_k \setminus A_{k+1} \subseteq A_k$, la contención $\supseteq$ se cumple. Demostremos la contención $\subseteq$.

Sea $x \in A_n$. Definimos J como en el Lema 2. Si $J = \mathbb{N}$, entonces $x \in C$. Supongamos que $J \neq \mathbb{N}$. Usando el Lema 2, encontamos p en $\mathbb{N}$ tal que $J = \{1, \ldots, p\}$. Entonces $x \in A_p$ y $x \notin A_{p+1}$, así que $x \in A_p \setminus A_{p+1} = D_p$. □

Demostración del inciso 3, usando la Proposición 1. Definimos $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mediante las reglas

$$P_0 \coloneqq A_1 \setminus A_1, \qquad P_n \coloneqq A_1 \setminus A_{n+1}, \qquad Q_n \coloneqq P_n \setminus P_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Entonces $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente de conjuntos, $P_0 = \varnothing$, y

$$Q_n = (A_1 \setminus A_{n+1}) \setminus (A_1 \setminus A_n) = A_n \setminus A_{n+1} = D_n.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$. Apliquemos la Proposición 1 a la sucesión $(P_n)_{n=0}^{\infty}$:

$$P_{k-1} = \bigcup_{n=1}^{k-1} Q_n, \qquad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} P_j = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n.$$

Primero, notemos que $A_1 \cap A_2 = A_2$ y por eso

$$\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{j+1} = \bigcap_{j=2}^{\infty} A_j = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j = C.$$

Luego, por la ley de De Morgan,

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} P_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (A_1 \setminus A_{j+1}) = A_1 \setminus \left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{j+1} \right) = A_1 \setminus C.$$

Vamos a simplificar el lado derecho de (1).

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=k}^{\infty} Q_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} Q_n \right) = \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} P_j \right) \setminus P_{k-1} = (A_1 \setminus C) \setminus P_{k-1}.$$

Luego

$$C \cup \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} D_n \right) = C \cup ((A_1 \setminus C) \setminus P_{k-1}).$$

Después de varios pasos elementales, concluimos que

$$C \cup \left(\bigcup_{n=k}^{\infty} D_n \right) = A_1 \setminus P_{k-1} = A_k. \qquad \square$$