

Descomposición de operadores lineales acotados en un espacio de Hilbert descompuesto en una suma ortogonal

Objetivos. Dado un espacio de Hilbert descompuesto en una suma ortogonal, $H = S_1 \oplus S_2$, descomponer cada operador $A \in \mathcal{B}(H)$ en una matriz 2×2 .

Prerrequisitos. La proyección ortogonal asociada a un subespacio cerrado.

Aplicaciones. Subespacios invariantes y reducentes de un operador.

1 Repaso (la descomposición del espacio de Hilbert en una suma ortogonal). Sea H un espacio de Hilbert y sea S_1 un subespacio cerrado de H . Pongamos $S_2 := S_1^\perp$. Por el teorema sobre la descomposición ortogonal de un espacio de Hilbert, para cada vector v en H existe un único vector u en S_1 tal que $v - u \in S_2$. En el lenguaje de operaciones con conjuntos, esto significa que

$$H = S_1 + S_2, \quad S_1 \cap S_2 = \{0_H\}.$$

El operador $P_{S_1}: H \rightarrow H$ está definido mediante la regla $P_{S_1}v := u$, donde $u \in S_1$ y $v - u \in S_2$. Es fácil de ver que

$$P_{S_2} = I - P_{S_1}, \quad \text{esto es,} \quad P_{S_1} + P_{S_2} = I.$$

Los operadores P_{S_1} y P_{S_2} tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \forall v \in H \quad P_{S_1}v \in S_1, \quad v - P_{S_1}v \in S_2, \\ \ker(P_{S_1}) = \operatorname{im}(P_{S_2}) = S_2, \quad \ker(P_{S_2}) = \operatorname{im}(P_{S_1}) = S_1. \end{aligned}$$

2 Repaso. Si S_1, S_2 son subespacios cerrados de H tales que $H = S_1 + S_2$ y $S_1 \perp S_2$, entonces se escribe

$$H = S_1 \oplus S_2.$$

En esta situación, necesariamente se tiene que $S_2 = S_1^\perp$.

3 Observación. Si $H = S_1 \oplus S_2$, entonces podemos formar el producto directo $S_1 \times S_2$ y definir $U: S_1 \times S_2 \rightarrow H$ mediante la regla

$$U(x, y) := x + y.$$

Es fácil de ver que U es un isomorfismo isométrico de espacios de Hilbert. Por lo tanto, la suma de la forma $x + y$, con $x \in S_1$, $y \in S_2$, se puede tratar como el par ordenado (x, y) .

4 Proposición. Sea $H = S_1 \oplus S_2$ y sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Para cada j, k en $\{1, 2\}$, definimos $T_{j,k}: S_k \rightarrow S_j$ mediante la siguiente regla:

$$T_{j,k}x := P_{S_j}Ax \quad (x \in S_k).$$

Entonces, se tienen las siguientes propiedades.

1. Para cada j, k en $\{1, 2\}$, $T_{j,k} \in \mathcal{B}(S_j, S_k)$ y $\|T_{j,k}\| \leq \|A\|$.
2. Par cada v en H , poniendo

$$u := P_{S_1}v, \quad w := P_{S_2}v, \tag{1}$$

obtenemos que

$$Av = \underbrace{(T_{1,1}u + T_{1,2}w)}_{\in S_1} + \underbrace{(T_{2,1}u + T_{2,2}w)}_{\in S_2}.$$

Demostración. 1. Ejercicio.

2. Sea $v \in H$. Definimos u y w como en (1). Entonces, $v = u + w$. Además,

$$\begin{aligned} Av &= (P_{S_1} + P_{S_2})A(u + w) = P_{S_1}Au + P_{S_1}Aw + P_{S_2}Au + P_{S_2}Aw \\ &= T_{1,1}u + T_{1,2}w + T_{2,1}u + T_{2,2}w. \end{aligned} \quad \square$$

5 Observación. Identificando la suma $u + w$ con el par ordenado (u, w) , como en la Observación 3, podemos escribir el resultado de la Proposición 4 en la siguiente forma:

$$Av = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, hemos descompuesto el operador A en una matriz 2×2 , cuyos elementos son operadores.