

Criterio de espacio métrico totalmente acotado en términos de sucesiones de Cauchy

Objetivos. Demostrar el criterio de espacios métricos totalmente acotados en términos de sucesiones de Cauchy.

Prerrequisitos. Espacio métrico totalmente acotado, sucesión de Cauchy, sucesión hermitaña, criterio de espacio métrico no totalmente acotado en términos de sucesiones hermitañas.

1 Observación. Recordar el concepto de sucesiones hermitañas y el criterio de espacio métrico no totalmente acotado en términos de sucesiones hermitañas.

2 Ejercicio. Mostrar que si una sucesión es hermitaña, entonces no tiene subsucesiones de Cauchy.

3 Teorema (criterio de espacio métrico totalmente acotado en términos de sucesiones de Cauchy). *Un espacio métrico (X, d) es totalmente acotado si, y solo si, cada sucesión en X contiene una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. $\Rightarrow$. Sea (X, d) totalmente acotado y sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Para cada $Y \subseteq X$ pongamos

$$J_Y := x^{-1}[Y], \quad \text{esto es,} \quad J_Y = \{n \in \mathbb{N} : x_n \in Y\}.$$

Vamos a construir por inducción una sucesión decreciente $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

- $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es decreciente,
- $\text{diam}(A_k) < 2^{-k-1}$ para cada k en $\mathbb{N}$,
- J_{A_k} es infinito para cada k en $\mathbb{N}$.

En el paso 1 encontramos una cubierta finita $\mathcal{C}_1$ de X tal que $\text{diam}(Y) < 1/2^2$ para cada Y en $\mathcal{C}_1$. Notamos que

$$\bigcup_{Y \in \mathcal{C}_1} J_Y = \bigcup_{Y \in \mathcal{C}_1} x^{-1}[Y] = x^{-1} \left[\bigcup_{Y \in \mathcal{C}_1} Y \right] = x^{-1}[X] = \mathbb{N}.$$

Como $\mathcal{C}_1$ es finito, no es posible que todos los elementos de la familia $(J_Y)_{Y \in \mathcal{C}_1}$ sean finitos. Elejimos A_1 en $\mathcal{C}_1$ tal que J_{A_1} sea infinito.

En el k -ésimo paso, con $k \geq 2$, encontramos una cubierta finita $\mathcal{C}_k$ del conjunto A_{k-1} tal que $\text{diam}(Y) < 2^{-k-1}$ para cada Y en $\mathcal{C}_k$. Notamos que

$$\bigcup_{Y \in \mathcal{C}_k} J_Y = \bigcup_{Y \in \mathcal{C}_k} x^{-1}[Y] = x^{-1} \left[\bigcup_{Y \in \mathcal{C}_k} Y \right] \supseteq x^{-1}[A_{k-1}] = J_{A_{k-1}}.$$

Como $J_{A_{k-1}}$ es infinito y $\mathcal{C}_k$ es finito, no es posible que todos los elementos de la familia $(J_Y)_{Y \in \mathcal{C}_k}$ sean finitos. Elegimos $A_k \in \mathcal{C}_k$ tal que J_{A_k} sea infinito.

Por el principio de inducción, la sucesión $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ está bien definida con estas reglas.

Ahora vamos a construir por inducción una sucesión $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Elejimos $\nu(1)$ en $\mathbb{N}$ tal que $\nu(1) \in J_{A_1}$. Lo último significa que $x_{\nu(1)} \in A_1$. En el k -ésimo paso ($k \geq 2$) elegimos $\nu(k)$ en $\mathbb{N}$ tal que $\nu(k) > \nu(k-1)$ y $\nu(k) \in J_{A_k}$, esto es, $x_{\nu(k)} \in A_k$. Entonces la sucesión ν es estrictamente creciente y la sucesión $x \circ \nu$ es de Cauchy. En efecto, como $x_{\nu(k)}, x_{\nu(k+1)} \in A_k$, obtenemos $d(x_{\nu(k)}, x_{\nu(k+1)}) < 2^{-k-1}$.

$\Leftarrow$. Supongamos que X no es totalmente acotado. Entonces, en X existe una sucesión hermitaña, es decir, existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ con valores en X tal que para cada $j \neq k$ se cumple $d(a_j, a_k) \geq \varepsilon$. Es fácil ver que en la sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ no existe subsucesión de Cauchy. $\square$