

Criterio de espacios métricos no totalmente acotados en términos de sucesiones hermitañas

Objetivos. Demostrar el criterio de espacios métricos no totalmente acotados en términos de sucesiones hermitañas.

Prerrequisitos. Espacio métrico totalmente acotado, subespacio de un espacio métrico totalmente acotado, sucesión de Cauchy.

1 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $s \in X^{\mathbb{N}}$. Decimos que s es *hermitaña* si existe $\eta > 0$ tal que

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \quad (j \neq k \implies d(s_j, s_k) \geq \eta).$$

2 Teorema (criterio de espacio métrico no totalmente acotado, en términos de sucesiones hermitañas). *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) (X, d) no es totalmente acotado;

(b) existe una sucesión hermitaña en (X, d) , es decir, existe una sucesión $s \in X^{\mathbb{N}}$ y un número $\eta > 0$ tales que

$$\forall j, k \in \mathbb{N} \quad (j \neq k \implies d(s_j, s_k) \geq \eta).$$

(c) existen un subconjunto infinito M de X y un $\eta > 0$ tales que

$$\forall x \in M \quad \forall y \in M \setminus \{x\} \quad d(x, y) \geq \eta.$$

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b). Como X no es acotado, existe $\eta > 0$ tal que en X no hay η -red finita. Elegimos $s_1 \in X$. Como $\{s_1\}$ no es η -red para X , existe s_2 en X tal que $d(s_1, s_2) \geq \eta$. En el k -ésimo paso, encontramos s_k en X tal que $d(s_k, s_j) \geq \eta$ para cada $j < k$.

Supongamos (b) y demostremos (c). Pongamos $M := s[\mathbb{N}]$, esto es, $M := \{s_k : k \in \mathbb{N}\}$. Entonces η y M tienen las propiedades requeridas.

Supongamos (c) y demostremos (a). Sean η y M como en la condición (c). Demostremos que X no es totalmente acotado. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que

X es totalmente acotado. Entonces su subespacio M también es totalmente acotado. Sea A un subconjunto finito de M tal que para cada x en M se cumple $d(x, A) < \eta$. Entonces para cada x en M encontramos a en A tal que $d(x, a) < \eta$. Por la propiedad de M , concluimos que $a = x$, esto es, $x \in A$. Hemos mostrado que $M = A$, pero esto contradice a la suposición que M es infinito. $\square$

3 Ejercicio. Sea $1 \leq p \leq +\infty$. En el espacio de Banach $\ell^p(\mathbb{N})$ consideremos la esfera unitaria:

$$S := \{a \in \ell^p(\mathbb{N}) : \|a\|_p = 1\}.$$

Demostrar que S no es totalmente acotada. Se recomienda considerar la sucesión definida por $s_m := e_m$, donde $e_m := (\delta_{m,k})_{k \in \mathbb{N}}$.

4 Ejercicio. Denotamos por $C([0, 1])$ el espacio de funciones continuas $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, con la distancia

$$d(f, g) := \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|.$$

En este espacio consideremos el conjunto

$$Y := \{f \in C([0, 1]) : \forall x \in [0, 1] \quad |f(x)| \leq 1\}.$$

Determinar si Y es totalmente acotado.

Sucesiones hermitañas y sucesiones de Cauchy

5 Ejercicio. Sean (X, d) un espacio métrico, $s \in X^{\mathbb{N}}$ una sucesión hermitaña, $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente. Demostrar que la subsucesión $s \circ \nu$ también es hermitaña.

6 Ejercicio. Sean (X, d) un espacio métrico y $s \in X^{\mathbb{N}}$ una sucesión hermitaña. Demostrar que s no es sucesión de Cauchy.

7 Ejercicio. Demostrar que si s es una sucesión hermitaña en un espacio métrico, entonces s no tiene ninguna subsucesión de Cauchy.