Conjuntos numerables

1 Definición. Un conjunto A se llama *numerable*, si $A \sim \mathbb{N}$.

2 Definición. Un conjunto A se llama *a lo sumo numerable*, si A es finito o numerable.

3 Ejemplo. Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables.

4 Proposición. *Para cada n en $\mathbb{N}_0$, $J_n \nsim \mathbb{N}$.*

Vamos a usar el principio de inducción en la siguiente forma: cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

5 Proposición. *Cualquier subconjunto no acotado de $\mathbb{N}$ es numerable.*

Demostración. Sea A un subconjunto no acotado de $\mathbb{N}$. Vamos a definir $f\colon \mathbb{N} \to A$ por inducción.

En el primer paso notamos que $A \neq \varnothing$, y definimos $f(1)$ como el elemento mínimo de A.

Supongamos que $k \in \mathbb{N}$ y los elementos $f(j)$ con $j \leq k$ ya están construidos. Como $f[J_k]$ es acotado y A no es acotado, $A \neq f[J_k]$, esto es, $A \setminus f[J_k] \neq \varnothing$. Definimos $f(k+1)$ como el elemento mínimo de $A \setminus f[J_k]$.

Mostremos que f es estrictamente creciente. Sea $k \in \mathbb{N}$. Entonces $f[J_{k-1}] \subseteq f[J_k]$, luego $A \setminus f[J_k] \subseteq A \setminus f[J_{k-1}]$ y

$$f(k+1) = \operatorname{mín}(A \setminus f[J_k]) \geq \operatorname{mín}(A \setminus f[J_{k-1}]) = f(k).$$

Más aún, como $f(k+1) \in A \setminus f[J_k]$, obtenemos $f(k+1) \neq f(k)$. Hemos mostrado que $f(k+1) > f(k)$ para cada k, así que f es estrictamente creciente. Por consecuencia, f es inyectiva.

Como f es estrictamente creciente, $f(2) \geq f(1) + 1 \geq 2$, $f(3) \geq f(2) + 1 \geq 3$, etc. Por inducción es fácil mostrar que $f(k) \geq k$ para cada k en $\mathbb{N}$.

Demostremos que $f(\mathbb{N}) = A$. Si $b \in A \setminus f(\mathbb{N})$, entonces $b \neq f(b)$. Al mismo tiempo, $b \leq f(b)$. Luego $b < f(b)$. Por otro lado, $b \in A \setminus f[\mathbb{N}] \subseteq A \setminus f[J_{b-1}]$. Como $f(b) = \operatorname{mín}(A \setminus f[J_{b-1}])$, concluimos que $f(b) \leq b$. Contradicción. $\square$

6 Proposición. *Un conjunto es a lo sumo numerable si y solo si es equipotente a algún subconjunto de* $\mathbb{N}$.

Demostración. La necesidad sale directamente de la definición, y la suficiencia de las dos proposiciones anteriores. □

7 Proposición. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.*

8 Proposición. *Si* A *es numerable,* B *es finito y* $A \cap B = \varnothing$*, entonces* $A \cup B$ *es numerable.*

Demostración. Sea $f\colon \mathbb{N} \to A$ una biyección y sea $g\colon J_n \to B$ una biyección. Definimos $h\colon \mathbb{N} \to A \cup B$ mediante la siguiente regla:

$$h(k) := \begin{cases} g(k), & k \le n; \\ f(k-n), & k > n. \end{cases}$$

Entonces h es una biyección. □

9 Proposición. *Si* $A \sim \mathbb{N}$, $B \sim \mathbb{N}$ *y* $A \cap B = \varnothing$*, entonces* $A \cup B \sim \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $f\colon \mathbb{N} \to A$ y $g\colon \mathbb{N} \to B$ biyecciones. Definimos $h\colon \mathbb{N} \to A \cup B$ mediante la regla

$$h(k) := \begin{cases} f(j), & \text{si } k = 2j-1,\ j \in \mathbb{N}; \\ g(j), & \text{si } k = 2j,\ j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces h es una biyección. □

10 Proposición. *Si* $A \sim \mathbb{N}$ *y* B *es a lo más numerable, entonces* $A \cup B \sim \mathbb{N}$.

Demostración. Pongamos $C := B \setminus A$. Entonces $A \cap C = \varnothing$, $A \cup B = A \cup C$, y C es finito o numerable. □

11 Proposición. *Si* $n \in \mathbb{N}$ *y* $A_1, \ldots, A_n$ *son conjuntos a lo más numerables, entonces* $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ *es a lo más numerable.*

12 Ejercicio. Muestre que $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

13 Lema. *Para cada* m *en* $\mathbb{N}$ *pongamos*

$$\alpha_m := \frac{m(m-1)}{2}.$$

Entonces la sucesión $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *toma valores en* $\mathbb{N}_0$*, es estrictamente creciente, no acotada, y* $\alpha_{m+1} - \alpha_m = m$.

Los primeros valores de la sucesión $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ son

$$\alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 = 1, \qquad \alpha_3 = 3, \qquad \alpha_4 = 6.$$

14 Proposición. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$.

Demostración. Definimos $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mediante la regla

$$f(j,k) \coloneqq \alpha_{j+k-1} + j.$$

Mostremos que f es inyectiva. Sean $(j,k),(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $(j,k)\neq(p,q)$. Si $j+k>p+q$, entonces

$$\begin{aligned} f(j,k)-f(p,q) &= \alpha_{j+k-1}+j-\alpha_{p+q-1}-p = (\alpha_{j+k-1}-\alpha_{p+q-1})+(j-p) \\ &\geq (p+q-1)+(j-p) = (q-1)+j > 0. \end{aligned}$$

Si $j+k=p+q$, pero $j>p$, entonces también $f(j,k)>f(p,q)$. Los otros casos se consideran de manera similar.

Mostremos que f es sobre. Sea $n\in\mathbb{N}$. Usando el hecho que los números $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ forman una sucesión estrictamente creciente y no acotada, encontramos m en $\mathbb{N}$ tal que $\alpha_m < n \leq \alpha_{m+1}$. Pongamos $j=n-\alpha_m$ y $k=m+1-j$. Entonces $0<j\leq\alpha_{m+1}-\alpha_m=m$ y $k\geq 1$, así que $(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Además, $f(j,k)=\alpha_m+j=n$. $\square$

15 Proposición. *La unión de toda familia finita o numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

Demostración. El caso de una familia finita de conjuntos numerables se estudió en la Proposición 11. Consideremos el caso de una unión numerable de conjuntos numerables. Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos numerables. Para cada k en $\mathbb{N}$, sea $f_k\colon A_k\to\mathbb{N}$ una biyección. Pongamos $B\coloneqq\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k$. Definimos $g\colon B\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ de la siguiente manera. Dado b en B, encontramos el mínimo índice k tal que $b\in A_k$, y pongamos $g(b)=(k,f_k(b))$. Entonces g es inyectiva. Luego $B\prec\mathbb{N}\times\mathbb{N}\sim\mathbb{N}$. Por otro lado, como $A_1\sim\mathbb{N}$ y $A_1\subseteq B$, obtenemos $\mathbb{N}\prec B$. Por el teorema de Cantor–Schröder–Bernstein, $B\sim\mathbb{N}$. $\square$

16 Proposición. $\mathbb{Q}\sim\mathbb{N}$.

Demostración. Denotemos por A al conjunto de los números racionales positivos. Cada elemento de A es de la forma p/q, donde $p,q\in\mathbb{N}$, p y q son primos relativos. Por eso $A\prec\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Luego $A\prec\mathbb{N}$. Por otro lado, A es infinito. Por eso $A\sim\mathbb{N}$.

Denotemos por B al conjunto de los números racionales negativos. Entonces de manera similar $B \sim \mathbb{N}$.

Finalmente notamos que $\mathbb{Q} = A \cup B \cup \{0\}$, así que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. $\square$