Correspondencia entre los operadors lineales acotados y las formas sesquilineales acotadas (un tema de la unidad “Operadores en espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

5 de julio de 2022

Objetivos

Suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo,
$\mathcal{B}(H) :=$ el espacio de los operadores lineales acotados,
$\mathcal{S}(H) :=$ el espacio de las formas sesqulineales acotadas.

- Asociar una forma sesquilineal acotada a cada operador lineal acotado:

$$f_A(x, y) := \langle Ax, y \rangle.$$

- Demostrar que esta correspondencia es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S}(H)$.

Aplicaciones

- Construcción del operador adjunto.
- Propiedades de los operadores autoadjuntos.

Prerrequisitos

- El espacio normado $\mathcal{B}(H)$ de los operadores lineales acotados.
- El espacio normado $\mathcal{S}(H)$ de las formas sesquilineales acotadas.
- El teorema de Fréchet–Riesz.
- La idea de "currificación": $C^{A\times B} \sim (C^A)^B$.

Plan

La forma sesquilineal acotada inducida por un operador lineal acotado

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Definimos $f_A \colon H^2 \to \mathbb{C}$,

$$f_A(u, v) := \langle Au, v \rangle.$$

Entonces $f_A \in \mathcal{S}(H)$ y

$$\|f_A\| = \|A\|.$$

Demostración: f_A es sesquilineal

$$f_A(u, v) := \langle Au, v \rangle.$$

Demostración: f_A es sesquilineal

$$f_A(u, v) := \langle Au, v\rangle.$$

A es lineal y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es lineal respecto al primer argumento.

Demostración: f_A es sesquilineal

$$f_A(u, v) := \langle Au, v \rangle.$$

A es lineal y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal respecto al primer argumento.

Por eso

Demostración: f_A es sesquilineal

$$f_A(u, v) := \langle Au, v\rangle.$$

A es lineal y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es lineal respecto al primer argumento.

Por eso f_A es lineal respecto al primer argumento.

Demostración: f_A es sesquilineal

$$f_A(u, v) := \langle Au, v \rangle.$$

A es lineal y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal respecto al primer argumento.

Por eso f_A es lineal respecto al primer argumento.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal conjugado respecto al segundo argumento.

Demostración: f_A es sesquilineal

$$f_A(u, v) \coloneqq \langle Au, v\rangle.$$

A es lineal y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal respecto al primer argumento.

Por eso f_A es lineal respecto al primer argumento.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal conjugado respecto al segundo argumento.

Por eso f_A es lineal conjugada respecto al segundo argumento.

Demostración: acotamos $\|f_A\|$ por arriba

Por la desigualdad de Schwarz,

$$|f_A(u,v)| = |\langle Au, v\rangle| \leq \|Au\|\,\|v\| \leq \|A\|\,\|u\|\,\|v\|.$$

Demostración: acotamos $\|f_A\|$ por arriba

Por la desigualdad de Schwarz,

$$|f_A(u,v)| = |\langle Au, v\rangle| \leq \|Au\|\,\|v\| \leq \|A\|\,\|u\|\,\|v\|.$$

Por lo tanto, $f_A \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f_A\| \leq \|A\|$.

Demostración: acotamos $\|f_A\|$ por abajo

Para cada u en H,

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = |\langle Au, Au\rangle| = |f_A(u, Au)| \le \|f_A\|\,\|u\|\,\|Au\|.$$

Demostración: acotamos $\|f_A\|$ por abajo

Para cada u en H,

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = |\langle Au, Au\rangle| = |f_A(u, Au)| \leq \|f_A\|\,\|u\|\,\|Au\|.$$

Si $Au \neq 0_H$, entonces dividimos entre $\|Au\|$ y obtenemos

$$\|Au\| \leq \|f_A\|\,\|u\|.$$

Demostración: acotamos $\|f_A\|$ por abajo

Para cada u en H,

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = |\langle Au, Au\rangle| = |f_A(u, Au)| \leq \|f_A\|\,\|u\|\,\|Au\|.$$

Si $Au \neq 0_H$, entonces dividimos entre $\|Au\|$ y obtenemos

$$\|Au\| \leq \|f_A\|\,\|u\|.$$

Esta desigualdad también se cumple, si $Au = 0_H$.

Demostración: acotamos $\|f_A\|$ por abajo

Para cada u en H,

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = |\langle Au, Au \rangle| = |f_A(u, Au)| \leq \|f_A\| \, \|u\| \, \|Au\|.$$

Si $Au \neq 0_H$, entonces dividimos entre $\|Au\|$ y obtenemos

$$\|Au\| \leq \|f_A\| \, \|u\|.$$

Esta desigualdad también se cumple, si $Au = 0_H$.

Concluimos que $\|A\| \leq \|f_A\|$.

El operador cuya forma sesquilineal es cero

Corolario

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que $f_A = 0_{\mathcal{S}(H)}$, es decir, f_A es la función cero. Entonces $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$.

El operador cuya forma sesquilineal es cero

Corolario

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que $f_A = 0_{\mathcal{S}(H)}$, es decir, f_A es la función cero. Entonces $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$.

Ejercicio. Demostrar este corolario de manera más directa, sin usar la proposición anterior.

Los operadores cuyas formas sesquilineales coinciden

Ejercicio. Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $f_S = f_T$. Demostrar que $S = T$.

Plan

La forma cuadrática asociada al operador lineal acotado

Dado $A \in \mathcal{B}(H)$, definimos $q_A \colon H \to \mathbb{C}$,

$$q_A(v) := f_A(v, v) \qquad (v \in H),$$

esto es,

$$q_A(v) = \langle Av, v \rangle \qquad (v \in H).$$

La identidad de polarización para las formas sesquilineales

Ya sabemos que para cada forma sesquilineal $g\colon H^2 \to \mathbb{C}$
se cumple la identidad de polarización:

$$g(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y).$$

La identidad de polarización para la forma sesquilineal asociada al operador lineal acotado

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces para cada x, y en H

$$f_A(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_A(x + \mathrm{i}^k\, y),$$

esto es,

$$\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \langle A(x + \mathrm{i}^k\, y), x + \mathrm{i}^k\, y\rangle.$$

La identidad de polarización para la forma sesquilineal asociada al operador lineal acotado

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Entonces para cada x, y en H

$$f_A(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, q_A(x + \mathrm{i}^k \, y),$$

esto es,

$$\langle Ax, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \langle A(x + \mathrm{i}^k \, y), x + \mathrm{i}^k \, y \rangle.$$

Demostración. Aplicar la identidad de polarización a $g = f_A$.

El operador lineal acotado cuya forma cuadrática es cero

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que

$$\forall u \in A \qquad q_A(u) = 0.$$

Entonces $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$.

El operador lineal acotado cuya forma cuadrática es cero

Proposición

Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que

$$\forall u \in A \qquad q_A(u) = 0.$$

Entonces $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$.

Demostración: ejercicio.

La igualdad de los operadores y la igualdad de las formas cuadráticas

Ejercicio.

Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $q_S = q_T$. Demostrar que $S = T$.

Plan

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada a una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dados $x, y \in \mathbb{C}^n$, expresar

$$\langle Ax, y \rangle$$

en términos de las componentes de A, x, y.

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada al operador de multiplicación

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $a \in L^\infty(X, \mu)$.

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada al operador de multiplicación

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $a \in L^\infty(X, \mu)$.

Denotamos por M_a el operador de multiplicación por a que actúa en $L^2(X, \mu)$ mediante la regla

$$(M_a f)(x) \coloneqq a(x) f(x).$$

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada al operador de multiplicación

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $a \in L^\infty(X, \mu)$.

Denotamos por M_a el operador de multiplicación por a que actúa en $L^2(X, \mu)$ mediante la regla

$$(M_a f)(x) := a(x) f(x).$$

Mostrar que

$$\langle M_a f, g \rangle = \int_X a\, f\, \overline{g}\, \mathrm{d}\mu.$$

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada al operador integral

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $K \in \mathcal{M}(X \times X, \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada al operador integral

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $K \in \mathcal{M}(X \times X, \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Por simplicidad, supongamos que $\mu(X) < +\infty$ y $K \in L^\infty(X \times X, \mu \times \mu)$.

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada al operador integral

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $K \in \mathcal{M}(X \times X, \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Por simplicidad, supongamos que $\mu(X) < +\infty$ y $K \in L^\infty(X \times X, \mu \times \mu)$.

Denotamos por S_K al operador integral que actúa en $L^2(X, \mu)$ mediante la regla

$$(S_K f)(x) := \int_X K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Ejemplo: la forma sesquilineal asociada al operador integral

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $K \in \mathcal{M}(X \times X, \mathcal{F} \times \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Por simplicidad, supongamos que $\mu(X) < +\infty$ y $K \in L^\infty(X \times X, \mu \times \mu)$.

Denotamos por S_K al operador integral que actúa en $L^2(X, \mu)$ mediante la regla

$$(S_K f)(x) := \int_X K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}\mu(y).$$

Demostrar que

$$\langle S_K f, g \rangle = \int_X \int_X K(x, y) f(y) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}\mu(y) \, \mathrm{d}\mu(x).$$

Ejemplo: las formas sesquilineales asociadas a los operadores de desplazamiento

$R :=$ el operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Ejemplo: las formas sesquilineales asociadas a los operadores de desplazamiento

$R :=$ el operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^2(\mathbb{N})$.

$L :=$ el operador de desplazamiento a la izquierda en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Ejemplo: las formas sesquilineales asociadas a los operadores de desplazamiento

$R :=$ el operador de desplazamiento a la derecha en $\ell^2(\mathbb{N})$.

$L :=$ el operador de desplazamiento a la izquierda en $\ell^2(\mathbb{N})$.

Dados x, y en $\ell^2(\mathbb{N})$, calcular

$$\langle Rx, y \rangle, \qquad \langle Lx, y \rangle.$$

Plan

Teorema de Fréchet–Riesz sobre el espacio dual del espacio de Hilbert

Para cada a en H, definimos $\varphi_a\colon H \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \langle x, a \rangle.$$

Teorema de Fréchet–Riesz sobre el espacio dual del espacio de Hilbert

Para cada a en H, definimos $\varphi_a\colon H \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \langle x, a \rangle.$$

Ya sabemos que $\varphi_a \in H^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

Teorema de Fréchet–Riesz sobre el espacio dual del espacio de Hilbert

Para cada a en H, definimos $\varphi_a\colon H \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \langle x, a\rangle.$$

Ya sabemos que $\varphi_a \in H^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

Definimos $\Phi\colon H \to H^*$,

$$\Phi(a) := \varphi_a.$$

Sabemos que Φ es una función lineal conjugada e isométrica.

Teorema de Fréchet–Riesz sobre el espacio dual del espacio de Hilbert

Para cada a en H, definimos $\varphi_a \colon H \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \langle x, a \rangle.$$

Ya sabemos que $\varphi_a \in H^*$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|$.

Definimos $\Phi \colon H \to H^*$,

$$\Phi(a) := \varphi_a.$$

Sabemos que Φ es una función lineal conjugada e isométrica.

Ejercicio. Recordar el enunciado del teorema de Fréchet–Riesz.

Sobre la igualdad de los valores del producto interno (repaso)

Ejercicio.

Sean $u, v \in H$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $u = v$;

(b) $\langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle$ para cada w en H;

(c) $\langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle$ para cada w en H.

El teorema de Fréchet–Riesz para las formas sesquilineales acotadas

Teorema

Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Entonces existe un único A en $\mathcal{B}(H)$ tal que $f_A = g$, esto es,

$$\forall u, v \in H \qquad g(u, v) = \langle Au, v \rangle.$$

El teorema de Fréchet–Riesz para las formas sesquilineales acotadas

Teorema

Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Entonces existe un único A en $\mathcal{B}(H)$ tal que $f_A = g$, esto es,

$$\forall u, v \in H \qquad g(u, v) = \langle Au, v \rangle.$$

La unicidad ya fue mostrada en uno de los ejercicios anteriores.

Demostración de la existencia: construcción de h_u

Para cada u en H, consideremos la función $h_u\colon H \to \mathbb{C}$,

$$h_u(v) \coloneqq \overline{g(u,v)}.$$

Demostración de la existencia: construcción de h_u

Para cada u en H, consideremos la función $h_u\colon H \to \mathbb{C}$,

$$h_u(v) \coloneqq \overline{g(u,v)}.$$

Como g es lineal conjugada respecto al segundo argumento, la función h_u es lineal.

Demostración de la existencia: construcción de h_u

Para cada u en H, consideremos la función $h_u\colon H \to \mathbb{C}$,

$$h_u(v) \coloneqq \overline{g(u, v)}.$$

Como g es lineal conjugada respecto al segundo argumento, la función h_u es lineal.

Además,

$$|h_u(v)| = |g(u, v)| \leq \|g\| \, \|u\| \, \|v\| = (\|g\| \, \|u\|) \, \|v\|.$$

Demostración de la existencia: construcción de h_u

Para cada u en H, consideremos la función $h_u\colon H \to \mathbb{C}$,

$$h_u(v) := \overline{g(u,v)}.$$

Como g es lineal conjugada respecto al segundo argumento, la función h_u es lineal.

Además,

$$|h_u(v)| = |g(u,v)| \le \|g\| \, \|u\| \, \|v\| = (\|g\| \, \|u\|) \, \|v\|.$$

Hemos mostrado que $h_u \in H^*$.

Demostración de la existencia: construcción de A

Para cada u en H, hemos definido $h_u(v) := \overline{g(u, v)}$. Hemos demostrado que $h_u \in H^*$.

Demostración de la existencia: construcción de A

Para cada u en H, hemos definido $h_u(v) := \overline{g(u,v)}$. Hemos demostrado que $h_u \in H^*$.

Por el teorema de Fréchet–Riesz, existe un único vector w en H tal que

$$\forall v \in H \qquad h_u(v) = \langle v, w \rangle.$$

Demostración de la existencia: construcción de A

Para cada u en H, hemos definido $h_u(v) := \overline{g(u,v)}$. Hemos demostrado que $h_u \in H^*$.

Por el teorema de Fréchet–Riesz, existe un único vector w en H tal que

$$\forall v \in H \qquad h_u(v) = \langle v, w \rangle.$$

Este vector w depende de la función h_u y por lo tanto depende del vector u.

Demostración de la existencia: construcción de A

Para cada u en H, hemos definido $h_u(v) := \overline{g(u,v)}$. Hemos demostrado que $h_u \in H^*$.

Por el teorema de Fréchet–Riesz, existe un único vector w en H tal que

$$\forall v \in H \qquad h_u(v) = \langle v, w \rangle.$$

Este vector w depende de la función h_u y por lo tanto depende del vector u.

Denotemos este vector w por $A(u)$.

Demostración de la existencia: construcción de A

Para cada u en H, hemos definido $h_u(v) := \overline{g(u,v)}$. Hemos demostrado que $h_u \in H^*$.

Por el teorema de Fréchet–Riesz, existe un único vector w en H tal que

$$\forall v \in H \qquad h_u(v) = \langle v, w \rangle.$$

Este vector w depende de la función h_u y por lo tanto depende del vector u.

Denotemos este vector w por $A(u)$. Hemos definido $A\colon H \to H$ con la siguiente propiedad:

$$\overline{g(u,v)} = h_u(v) = \langle v, A(u) \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\langle A(u), v \rangle = g(u,v).$$

Linealidad de A

Mostremos que la función A es homogénea.

Linealidad de A

Mostremos que la función A es homogénea.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\langle A(\lambda u), v\rangle = g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v) = \lambda\langle A(u), v\rangle = \langle \lambda A(u), v\rangle.$$

Linealidad de A

Mostremos que la función A es homogénea.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\langle A(\lambda u), v \rangle = g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v) = \lambda \langle A(u), v \rangle = \langle \lambda A(u), v \rangle.$$

Como v es arbitrario, concluimos que $A(\lambda u) = \lambda A(u)$.

Linealidad de A

Mostremos que la función A es homogénea.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\langle A(\lambda u), v\rangle = g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v) = \lambda\langle A(u), v\rangle = \langle \lambda A(u), v\rangle.$$

Como v es arbitrario, concluimos que $A(\lambda u) = \lambda A(u)$.

La propiedad aditiva de A se demuestra de manera similar.

Acotación de A

Para cada u, v en H, tenemos

$$\|A(u)\|^2 = \langle A(u), A(u)\rangle = |\langle A(u), A(u)\rangle| = |g(u, A(u))| \leq \|g\| \, \|u\| \, \|A(u)\|.$$

Acotación de A

Para cada u, v en H, tenemos

$$\|A(u)\|^2 = \langle A(u), A(u) \rangle = |\langle A(u), A(u) \rangle| = |g(u, A(u))| \leq \|g\| \, \|u\| \, \|A(u)\|.$$

Si $A(u) \neq 0_H$, dividimos entre $\|A(u)\|$ y obtenemos

$$\|A(u)\| \leq \|g\| \, \|u\|.$$

Acotación de A

Para cada u, v en H, tenemos

$$\|A(u)\|^2 = \langle A(u), A(u)\rangle = |\langle A(u), A(u)\rangle| = |g(u, A(u))| \leq \|g\|\,\|u\|\,\|A(u)\|.$$

Si $A(u) \neq 0_H$, dividimos entre $\|A(u)\|$ y obtenemos

$$\|A(u)\| \leq \|g\|\,\|u\|.$$

Si $A(u) = 0_H$, la desigualdad también se cumple.

Acotación de A

Para cada u, v en H, tenemos

$$\|A(u)\|^2 = \langle A(u), A(u)\rangle = |\langle A(u), A(u)\rangle| = |g(u, A(u))| \le \|g\|\,\|u\|\,\|A(u)\|.$$

Si $A(u) \ne 0_H$, dividimos entre $\|A(u)\|$ y obtenemos

$$\|A(u)\| \le \|g\|\,\|u\|.$$

Si $A(u) = 0_H$, la desigualdad también se cumple.

Hemos mostrado que $A \in \mathcal{B}(H)$.

Una forma más concisa de la demostración, parte 1

Denotemos por $\overline{\mathcal{B}}(H_1, H_2)$ al conjunto de operadores lineal conjugados acotados.

Una forma más concisa de la demostración, parte 1

Denotemos por $\overline{\mathcal{B}}(H_1, H_2)$ al conjunto de operadores lineal conjugados acotados.

Ejercicio. Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Definimos $Z\colon H \to H^*$,

$$Z(u)(v) := \overline{g(u, v)}.$$

Aquí se usa la idea de "currificación".

Una forma más concisa de la demostración, parte 1

Denotemos por $\overline{\mathcal{B}}(H_1, H_2)$ al conjunto de operadores lineal conjugados acotados.

Ejercicio. Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Definimos $Z\colon H \to H^*$,

$$Z(u)(v) := \overline{g(u,v)}.$$

Aquí se usa la idea de "currificación".

Demostrar que $Z \in \overline{\mathcal{B}}(H, H^*)$ y

$$\sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0_H}} \frac{\|Z(u)\|}{\|u\|} \le \|g\|.$$

Una forma más concisa de la demostración, parte 1

Denotamos por $\Phi\colon H \to H^*$ la correspondencia de Fréchet–Riesz:

$$\Phi(u)(v) := \langle v, u \rangle.$$

Una forma más concisa de la demostración, parte 1

Denotamos por $\Phi\colon H \to H^*$ la correspondencia de Fréchet–Riesz:

$$\Phi(u)(v) \coloneqq \langle v, u \rangle.$$

Ejercicio.

Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Pongamos $A \coloneqq \Phi^{-1} \circ Z$.

Demostrar que $A \in \mathcal{B}(H)$ y $f_A = g$.

Una forma más concisa de la demostración, parte 1

Denotamos por $\Phi\colon H \to H^*$ la correspondencia de Fréchet–Riesz:

$$\Phi(u)(v) \coloneqq \langle v, u \rangle.$$

Ejercicio.

Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Pongamos $A \coloneqq \Phi^{-1} \circ Z$.

Demostrar que $A \in \mathcal{B}(H)$ y $f_A = g$.

Idea de demostración en forma breve:

$$\mathcal{S}(H) \sim \overline{\mathcal{B}}(H, H^*) \sim \mathcal{B}(H, H).$$

Correspondencia entre $\mathcal{B}(H)$ y $\mathcal{S}(H)$

Corolario

Definimos $\Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H)$ mediante la regla $\Omega(A) := f_A$, esto es,

$$\Omega(A)(u, v) := \langle Au, v\rangle.$$

Entonces Ω es un isomorfismo isométrico de espacios normados.