La correspondencia entre los operadores lineales acotados y formas sesquilineales acotadas

Objetivos. Demostrar que es biyectiva e isométrica la correspondencia entre los operadores lineales acotados y las formas sesquilineales acotadas en un espacio de Hilbert.

En estos apuntes denotamos por $\mathcal{S}(H)$ el conjunto de todas las formas sesquilineales acotadas $H^2 \to \mathbb{C}$.

La forma sesquilineal acotada inducida por un operador lineal acotado

1 Proposición. *Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Definimos $f_A \colon H^2 \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:*

$$f_A(u, v) \coloneqq \langle Au, v \rangle.$$

Entonces $f_A \in \mathcal{S}(H)$ y

$$\|f_A\| = \|A\|.$$

Demostración. 1. Usando la propiedad lineal A y la propiedad sesquilineal de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es fácil demostrar que f_A es sesquilineal.

2. Por la desigualdad de Schwarz,

$$|f_A(u, v)| = |\langle Au, v \rangle| \leq \|Au\| \, \|v\| \leq \|A\| \, \|u\| \, \|v\|.$$

De aquí se sigue que $f_A \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f_A\| \leq \|A\|$.

3. Para cada u en H, entonces

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = |\langle Au, Au \rangle| = |f_A(u, Au)| \leq \|f_A\| \, \|u\| \, \|Au\|.$$

Si $Au \neq 0_H$, entonces dividimos entre $\|Au\|$ y obtenemos

$$\|Au\| \leq \|f_A\| \, \|u\|.$$

Esta desigualdad también se cumple, si $Au = 0_H$. Concluimos que $\|A\| \leq \|f_A\|$. $\square$

2 Corolario. *Sea* $A \in \mathcal{B}(H)$ *tal que* $f_A = 0_{\mathcal{S}(H)}$, *es decir,* f_A *es la función cero. Entonces* $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$.

3 Ejercicio. Demostrar el Corolario 2 de manera más directa, sin usar la Proposición 1.

4 Ejercicio. Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $f_S = f_T$. Demostrar que $S = T$.

La forma cuadrática asociada al operador lineal acotado

5 Definición. Dado $A \in \mathcal{B}(H)$, definimos $q_A \colon H \to \mathbb{C}$,

$$q_A(v) \coloneqq f_A(v, v) \qquad (v \in H),$$

esto es,

$$q_A(v) = \langle Av, v \rangle \qquad (v \in H).$$

Recordemos que para cada forma sesquilineal $g \colon H^2 \to \mathbb{C}$ se cumple la *identidad de polarización*:

$$g(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, g(x + \mathrm{i}^k \, y, x + \mathrm{i}^k \, y). \tag{1}$$

6 Proposición. *Sea* $A \in \mathcal{B}(H)$ *tal que*

$$\forall u \in A \qquad q_A(u) = 0.$$

Entonces $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$.

Demostración. Para cada x, y en H, aplicamos la identidad de polarización (1) a la forma sesquilineal f_A:

$$f_A(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, q_A(x + \mathrm{i}^k \, y).$$

Por la suposición, cada sumando en el lado derecho es 0. Concluimos que $f_A = 0_{\mathcal{S}(H)}$. Luego, por el Corolario 2, $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$. $\square$

7 Ejercicio. Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $q_S = q_T$. Demostrar que $S = T$.

El operador lineal acotado asociado a la forma sesquilineal acotada

8 Ejercicio. Recordar el teorema de Fréchet–Riesz sobre la representación de los funcionales lineales acotados en el espacio de Hilbert.

9 Ejercicio. Recordar una demostración del siguiente hecho. Si $u, v \in H$ y

$$\forall w \in H \qquad \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle,$$

entonces $u = v$.

10 Teorema (el teorema de Fréchet–Riesz para las formas sesquilineales acotadas)**.** *Sea $g \in \mathcal{S}(H)$. Entonces existe un único A en $\mathcal{B}(H)$ tal que $f_A = g$, esto es,*

$$\forall u, v \in H \qquad g(u, v) = \langle Au, v \rangle. \tag{2}$$

Demostración. La unicidad ya fue mostrada antes (Ejercicio 4). Demostremos la existencia.

1. Construcción de A. Para cada u en H, consideremos la función $h_u \colon H \to \mathbb{C}$,

$$h_u(v) := \overline{g(u, v)}.$$

Como g es lineal conjugada respecto al segundo argumento, la función h_u es lineal. Además,

$$|h_u(v)| = |g(u, v)| \leq \|g\| \, \|u\| \, \|v\| = (\|g\| \, \|u\|) \, \|v\|.$$

Hemos mostrado que $h_u \in H^*$. Por el teorema de Fréchet–Riesz, existe un único vector w en H tal que

$$\forall v \in H \qquad h_u(v) = \langle v, w \rangle.$$

Este vector w depende de la función h_u y por lo tanto depende del vector u. Denotemos este vector w por $A(u)$. Hemos definido una función $A \colon H \to H$ con la siguiente propiedad:

$$\overline{g(u, v)} = h_u(v) = \langle v, A(u) \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\langle A(u), v \rangle = g(u, v).$$

Hemos demostrado que la función A tiene propiedad (2).

2. Linealidad de A. Mostremos que la función A es homogénea. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\langle A(\lambda u), v \rangle = g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v) = \lambda \langle A(u), v \rangle = \langle \lambda A(u), v \rangle.$$

Como v es arbitrario, concluimos que $A(\lambda u) = \lambda A(u)$. La propiedad aditiva de A se demuestra de manera similar.

3. Acotación de A. Para cada u, v en H tenemos

$$\|A(u)\|^2 = \langle A(u), A(u) \rangle = |\langle A(u), A(u) \rangle| = |g(u, A(u))| \leq \|g\| \, \|u\| \, \|A(u)\|.$$

Separando los casos $A(u) = 0_H$ y $A(u) \neq 0_H$, vemos que en ambos casos $\|A(u)\| \leq \|g\| \, \|u\|$. Hemos mostrado que $A \in \mathcal{B}(H)$. $\square$

11 Ejercicio. Escribir una demostración más concisa del Teorema 10, usando la siguiente notación. Denotamos por $\Phi\colon H \to H^*$ la correspondencia de Fréchet–Riesz:

$$\Phi(u)(v) \coloneqq \langle v, u \rangle.$$

Sabemos que Φ es una función lineal conjugada e isométrica. Fijamos $g \in \mathcal{S}(H)$. Definimos $Z\colon H \to H^*$,

$$Z(u)(v) \coloneqq \overline{g(u, v)}.$$

Se recomienda demostrar que Z es una función lineal conjugada, con

$$\sup_{\substack{u \in H \\ u \neq 0_H}} \frac{\|Z(u)\|}{\|u\|} \leq \|g\|.$$

Definir A en términos de Z y Φ^{-1}.

12 Corolario. *Definimos $\Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H)$ mediante la regla $\Omega(A) \coloneqq f_A$, esto es,*

$$\Omega(A)(u, v) \coloneqq \langle Au, v \rangle.$$

Entonces Ω es un isomorfismo isométrico de espacios normados.

13 Ejemplo (la forma sesquilineal asociada a una matriz)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dados $x, y \in \mathbb{C}^n$, expresar

$$\langle Ax, y \rangle$$

en términos de las componentes de A, x, y.

14 Ejemplo (la forma sesquilineal asociada al operador de multiplicación)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $a \in L^\infty(X, \mu)$. Denotamos por M_a el operador de multiplicación por a que actúa en $L^2(X, \mu)$ mediante la regla

$$(M_a f)(x) \coloneqq a(x) f(x).$$

Mostrar que

$$\langle M_a f, g \rangle = \int_X a \, f \, \overline{g} \, \mathrm{d}\mu.$$