

Convolución de sucesiones de soporte finito (un tema de Análisis Armónico)

Egor Maximenko,

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

12 de octubre de 2021

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con sucesiones bilaterales cuyo dominio es \mathbb{Z} .

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con sucesiones bilaterales cuyo dominio es \mathbb{Z} .

Dada una sucesión $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, denotamos por $\text{supp}(a)$ su soporte :

$$\text{supp}(a) := \{j \in \mathbb{Z}: a_j \neq 0\}.$$

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con sucesiones bilaterales cuyo dominio es \mathbb{Z} .

Dada una sucesión $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, denotamos por $\text{supp}(a)$ su soporte :

$$\text{supp}(a) := \{j \in \mathbb{Z} : a_j \neq 0\}.$$

Aclaración. Para funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, el soporte se define de manera más complicada.

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con sucesiones bilaterales cuyo dominio es \mathbb{Z} .

Dada una sucesión $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, denotamos por $\text{supp}(a)$ su soporte :

$$\text{supp}(a) := \{j \in \mathbb{Z} : a_j \neq 0\}.$$

Aclaración. Para funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, el soporte se define de manera más complicada.

Ejemplo. Si $a_j = 1 + (-1)^j$ para cada j en \mathbb{Z} , entonces

$$\text{supp}(a) =$$

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con **sucesiones bilaterales** cuyo dominio es \mathbb{Z} .

Dada una sucesión $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, denotamos por $\text{supp}(a)$ su **soporte** :

$$\text{supp}(a) := \{j \in \mathbb{Z} : a_j \neq 0\}.$$

Aclaración. Para funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, el soporte se define de manera más complicada.

Ejemplo. Si $a_j = 1 + (-1)^j$ para cada j en \mathbb{Z} , entonces

$$\text{supp}(a) = 2\mathbb{Z}.$$

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con **sucesiones bilaterales** cuyo dominio es \mathbb{Z} .

Dada una sucesión $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, denotamos por $\text{supp}(a)$ su **soporte** :

$$\text{supp}(a) := \{j \in \mathbb{Z} : a_j \neq 0\}.$$

Aclaración. Para funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, el soporte se define de manera más complicada.

Ejemplo. Si $a_j = 1 + (-1)^j$ para cada j en \mathbb{Z} , entonces

$$\text{supp}(a) = 2\mathbb{Z}.$$

Ejemplo. Denotamos por $0_{\mathbb{Z}}$ la sucesión cero.

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con **sucesiones bilaterales** cuyo dominio es \mathbb{Z} .

Dada una sucesión $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, denotamos por $\text{supp}(a)$ su **soporte** :

$$\text{supp}(a) := \{j \in \mathbb{Z} : a_j \neq 0\}.$$

Aclaración. Para funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, el soporte se define de manera más complicada.

Ejemplo. Si $a_j = 1 + (-1)^j$ para cada j en \mathbb{Z} , entonces

$$\text{supp}(a) = 2\mathbb{Z}.$$

Ejemplo. Denotamos por $0_{\mathbb{Z}}$ la sucesión cero. Entonces $\text{supp}(0_{\mathbb{Z}}) =$

El soporte de una sucesión

En este tema trabajamos con **sucesiones bilaterales** cuyo dominio es \mathbb{Z} .

Dada una sucesión $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$, denotamos por $\text{supp}(a)$ su **soporte** :

$$\text{supp}(a) := \{j \in \mathbb{Z} : a_j \neq 0\}.$$

Aclaración. Para funciones $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, el soporte se define de manera más complicada.

Ejemplo. Si $a_j = 1 + (-1)^j$ para cada j en \mathbb{Z} , entonces

$$\text{supp}(a) = 2\mathbb{Z}.$$

Ejemplo. Denotamos por $0_{\mathbb{Z}}$ la sucesión cero. Entonces $\text{supp}(0_{\mathbb{Z}}) = \emptyset$.

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para los subconjuntos de \mathbb{Z} , ser finito equivale

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para los subconjuntos de \mathbb{Z} , ser finito equivale ser acotado.

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para los subconjuntos de \mathbb{Z} , ser finito equivale ser acotado.

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\text{supp}(a + b)$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para los subconjuntos de \mathbb{Z} , ser finito equivale ser acotado.

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\text{supp}(a + b) \subseteq \text{supp}(a) \cup \text{supp}(b),$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para los subconjuntos de \mathbb{Z} , ser finito equivale ser acotado.

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\text{supp}(a + b) \subseteq \text{supp}(a) \cup \text{supp}(b), \quad \text{supp}(\lambda a)$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para los subconjuntos de \mathbb{Z} , ser finito equivale ser acotado.

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\text{supp}(a + b) \subseteq \text{supp}(a) \cup \text{supp}(b), \quad \text{supp}(\lambda a) \subseteq \text{supp}(a).$$

Sucesiones de soporte finito

$$\mathcal{Q} := \left\{ a \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \text{supp}(a) \text{ es finito} \right\}.$$

Para los subconjuntos de \mathbb{Z} , ser finito equivale ser acotado.

Ejercicio. Si $a, b \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\text{supp}(a + b) \subseteq \text{supp}(a) \cup \text{supp}(b), \quad \text{supp}(\lambda a) \subseteq \text{supp}(a).$$

Proposición

\mathcal{Q} es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.

Sucesiones básicas

Para cada p en \mathbb{Z} ,

$$e_p := (\delta_{p,j})_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Sucesiones básicas

Para cada p en \mathbb{Z} ,

$$e_p := (\delta_{p,j})_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Por ejemplo,

$$e_3 = (\dots, 0, 0, 0, 0, 0, \underline{0}, 0, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

Sucesiones básicas

Para cada p en \mathbb{Z} ,

$$e_p := (\delta_{p,j})_{j \in \mathbb{Z}}.$$

Por ejemplo,

$$e_3 = (\dots, 0, 0, 0, 0, 0, \underline{0}, 0, 0, 1, 0, 0, \dots), \quad e_{-2} = (\dots, 0, -1, 0, \underline{0}, 0, 0, \dots),$$

donde están subrayadas las componentes con índice 0.

La base canónica de \mathcal{Q}

Notamos que

$$\text{supp}(e_p) =$$

La base canónica de \mathcal{Q}

Notamos que

$$\text{supp}(e_p) = \{p\}.$$

En particular, $e_p \in \mathcal{Q}$.

La base canónica de \mathcal{Q}

Notamos que

$$\text{supp}(e_p) = \{p\}.$$

En particular, $e_p \in \mathcal{Q}$.

Proposición

La familia $(e_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ es una base de \mathcal{Q} .

La base canónica de \mathcal{Q}

Notamos que

$$\text{supp}(e_p) = \{p\}.$$

En particular, $e_p \in \mathcal{Q}$.

Proposición

La familia $(e_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ es una base de \mathcal{Q} .

En particular, esta proposición dice que

$$\mathcal{Q} = \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}}).$$

Demostración de la independencia lineal

Sea J un subconjunto finito de \mathbb{Z} , y sea $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en \mathbb{C} .

Demostración de la independencia lineal

Sea J un subconjunto finito de \mathbb{Z} , y sea $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en \mathbb{C} .

Supongamos que

$$\sum_{p \in J} \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{Z}}.$$

Denotemos por a la sucesión en el lado izquierdo.

Demostración de la independencia lineal

Sea J un subconjunto finito de \mathbb{Z} , y sea $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en \mathbb{C} .

Supongamos que

$$\sum_{p \in J} \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{Z}}.$$

Denotemos por a la sucesión en el lado izquierdo.

Sea $q \in J$. Entonces

$$a_q =$$

Demostración de la independencia lineal

Sea J un subconjunto finito de \mathbb{Z} , y sea $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en \mathbb{C} .

Supongamos que

$$\sum_{p \in J} \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{Z}}.$$

Denotemos por a la sucesión en el lado izquierdo.

Sea $q \in J$. Entonces

$$a_q = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_q =$$

Demostración de la independencia lineal

Sea J un subconjunto finito de \mathbb{Z} , y sea $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en \mathbb{C} .

Supongamos que

$$\sum_{p \in J} \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{Z}}.$$

Denotemos por a la sucesión en el lado izquierdo.

Sea $q \in J$. Entonces

$$a_q = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,q} =$$

Demostración de la independencia lineal

Sea J un subconjunto finito de \mathbb{Z} , y sea $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en \mathbb{C} .

Supongamos que

$$\sum_{p \in J} \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{Z}}.$$

Denotemos por a la sucesión en el lado izquierdo.

Sea $q \in J$. Entonces

$$a_q = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,q} = \lambda_q.$$

Demostración de la independencia lineal

Sea J un subconjunto finito de \mathbb{Z} , y sea $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en \mathbb{C} .

Supongamos que

$$\sum_{p \in J} \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{Z}}.$$

Denotemos por a la sucesión en el lado izquierdo.

Sea $q \in J$. Entonces

$$a_q = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,q} = \lambda_q.$$

Por otro lado, $a_q =$

Demostración de la independencia lineal

Sea J un subconjunto finito de \mathbb{Z} , y sea $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en \mathbb{C} .

Supongamos que

$$\sum_{p \in J} \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{Z}}.$$

Denotemos por a la sucesión en el lado izquierdo.

Sea $q \in J$. Entonces

$$a_q = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,q} = \lambda_q.$$

Por otro lado, $a_q = (0_{\mathbb{Z}})_q = 0$.

Demostración de la independencia lineal

Sea J un subconjunto finito de \mathbb{Z} , y sea $(\lambda_p)_{p \in J}$ una familia en \mathbb{C} .

Supongamos que

$$\sum_{p \in J} \lambda_p e_p = 0_{\mathbb{Z}}.$$

Denotemos por a la sucesión en el lado izquierdo.

Sea $q \in J$. Entonces

$$a_q = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_q = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,q} = \lambda_q.$$

Por otro lado, $a_q = (0_{\mathbb{Z}})_q = 0$.

Hemos mostrado que $\lambda_q = 0$ para cada q en J .

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J .

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p :=$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Entonces para cada j en \mathbb{Z} tenemos

$$a_j =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Entonces para cada j en \mathbb{Z} tenemos

$$a_j = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_j =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Entonces para cada j en \mathbb{Z} tenemos

$$a_j = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,j} =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Entonces para cada j en \mathbb{Z} tenemos

$$a_j = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,j} =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Entonces para cada j en \mathbb{Z} tenemos

$$a_j = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,j} =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Entonces para cada j en \mathbb{Z} tenemos

$$a_j = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,j} = \begin{cases} \lambda_j, & j \in J, \\ 0, & j \in \mathbb{Z} \setminus J; \end{cases} =$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Entonces para cada j en \mathbb{Z} tenemos

$$a_j = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,j} = \begin{cases} \lambda_j, & j \in J, \\ 0, & j \in \mathbb{Z} \setminus J; \end{cases} = b_j.$$

Demostración de la completez

Sea $b \in \mathcal{Q}$. Queremos mostrar que $b \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Denotemos $\text{supp}(b)$ por J . Definimos $(\lambda_p)_{p \in J}$ mediante la regla $\lambda_p := b_p$.

Pongamos

$$a := \sum_{p \in J} \lambda_p e_p.$$

Entonces para cada j en \mathbb{Z} tenemos

$$a_j = \sum_{p \in J} \lambda_p (e_p)_j = \sum_{p \in J} \lambda_p \delta_{p,j} = \begin{cases} \lambda_j, & j \in J, \\ 0, & j \in \mathbb{Z} \setminus J; \end{cases} = b_j.$$

Hemos mostrado que $b = a \in \text{lin}((e_p)_{p \in \mathbb{Z}})$.

Convolución de dos sucesiones de soporte finito

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Se define $a * b: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k, \quad \text{esto es,} \quad (a * b)_j := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m a_{j-k} b_k.$$

Convolución de dos sucesiones de soporte finito

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Se define $a * b: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k, \quad \text{esto es,} \quad (a * b)_j := \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=-m}^m a_{j-k} b_k.$$

Proposición

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$ y sea $j \in J$. Entonces

$$(a * b)_j = \sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k.$$

Idea de demostración.

Sea

$$r := \max_{k \in \text{supp}(b)} |k|.$$

Idea de demostración.

Sea

$$r := \max_{k \in \text{supp}(b)} |k|.$$

Entonces para cada m en \mathbb{N}_0 con $m \geq r$ obtenemos

Idea de demostración.

Sea

$$r := \max_{k \in \text{supp}(b)} |k|.$$

Entonces para cada m en \mathbb{N}_0 con $m \geq r$ obtenemos

$$\sum_{k=-m}^m a_{j-k} b_k$$

Idea de demostración.

Sea

$$r := \max_{k \in \text{supp}(b)} |k|.$$

Entonces para cada m en \mathbb{N}_0 con $m \geq r$ obtenemos

$$\sum_{k=-m}^m a_{j-k} b_k = \sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k.$$

Ejemplos: convolución de sucesiones de soporte finito

Ejercicio. Sean

$$a = (\dots, 0, 0, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, \underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \dots),$$

$$b = e_1 - e_0 = (\dots, 0, \underline{-1}, 1, 0, \dots).$$

Calcular $a * b$.

Ejemplos: convolución de sucesiones de soporte finito

Ejercicio. Sean

$$a = (\dots, 0, 0, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, \underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \dots),$$

$$b = e_1 - e_0 = (\dots, 0, \underline{-1}, 1, 0, \dots).$$

Calcular $a * b$.

Ejercicio. Sean

$$a = (\dots, 0, 0, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, \underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \dots),$$

$$b = \frac{e_{-1} + e_0 + e_1}{3} = \left(\dots, 0, \frac{1}{3}, \underline{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}, 0, \dots \right).$$

Calcular $a * b$.

Ejemplos: convolución con las sucesiones básicas

Ejercicio. Sea

$$a = (\dots, 0, 0, \underline{a_0}, a_1, a_2, 0, 0, \dots).$$

Calcular $a * e_3$.

Ejemplos: convolución con las sucesiones básicas

Ejercicio. Sea

$$a = (\dots, 0, 0, \underline{a_0}, a_1, a_2, 0, 0, \dots).$$

Calcular $a * e_3$.

Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{Q}$ y sean $p, j \in \mathbb{Z}$. Calcular $(a * e_p)_j$.

Ejemplos: convolución con las sucesiones básicas

Ejercicio. Sea

$$a = (\dots, 0, 0, \underline{a_0}, a_1, a_2, 0, 0, \dots).$$

Calcular $a * e_3$.

Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{Q}$ y sean $p, j \in \mathbb{Z}$. Calcular $(a * e_p)_j$.

Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{Q}$. Calcular $a * e_0$.

Ejemplos: convolución con las sucesiones básicas

Ejercicio. Sea

$$a = (\dots, 0, 0, \underline{a_0}, a_1, a_2, 0, 0, \dots).$$

Calcular $a * e_3$.

Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{Q}$ y sean $p, j \in \mathbb{Z}$. Calcular $(a * e_p)_j$.

Ejercicio. Sea $a \in \mathcal{Q}$. Calcular $a * e_0$.

Ejercicio. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$. Calcular

$$e_p * e_q.$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones de soporte finito

Dados $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, denotamos por $A + B$ el conjunto

$$A + B :=$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones de soporte finito

Dados $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, denotamos por $A + B$ el conjunto

$$A + B := \{r \in \mathbb{Z} :$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones de soporte finito

Dados $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, denotamos por $A + B$ el conjunto

$$A + B := \{r \in \mathbb{Z} : \exists p \in A \exists q \in B \ r = p + q\}.$$

El soporte de la convolución de dos sucesiones de soporte finito

Dados $A, B \subseteq \mathbb{Z}$, denotamos por $A + B$ el conjunto

$$A + B := \{r \in \mathbb{Z} : \exists p \in A \exists q \in B \ r = p + q\}.$$

Proposición

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces

$$\text{supp}(a * b) \subseteq \text{supp}(a) + \text{supp}(b).$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es,

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$. Entonces

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$. Entonces

$$p \in$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$. Entonces

$$p \in \text{supp}(a),$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$. Entonces

$$p \in \text{supp}(a), \quad q \in$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$. Entonces

$$p \in \text{supp}(a), \quad q \in \text{supp}(b),$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$. Entonces

$$p \in \text{supp}(a), \quad q \in \text{supp}(b), \quad j =$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$. Entonces

$$p \in \text{supp}(a), \quad q \in \text{supp}(b), \quad j = p + q \in$$

Demostración

Supongamos que $j \in \text{supp}(a * b)$, esto es, $(a * b)_j \neq 0$.

Luego

$$\sum_{k \in \text{supp}(b)} a_{j-k} b_k \neq 0.$$

Elegimos q en $\text{supp}(b)$ tal que

$$a_{j-q} b_q \neq 0.$$

Pongamos $p := j - q$. Entonces

$$p \in \text{supp}(a), \quad q \in \text{supp}(b), \quad j = p + q \in \text{supp}(a) + \text{supp}(b).$$

La convolución es una operación binaria en \mathcal{Q}

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces $a * b \in \mathcal{Q}$.

La convolución es una operación binaria en \mathcal{Q}

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces $a * b \in \mathcal{Q}$.

Ejercicio. Demostrar que la operación $*$ en \mathcal{Q} es asociativa y conmutativa.

La convolución es una operación binaria en \mathcal{Q}

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces $a * b \in \mathcal{Q}$.

Ejercicio. Demostrar que la operación $*$ en \mathcal{Q} es asociativa y conmutativa.

Ejercicio. Demostrar la propiedad distributiva y la propiedad homogénea:

$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c), \quad (\lambda a) * c = \lambda(a * c).$$

La convolución es una operación binaria en \mathcal{Q}

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces $a * b \in \mathcal{Q}$.

Ejercicio. Demostrar que la operación $*$ en \mathcal{Q} es asociativa y conmutativa.

Ejercicio. Demostrar la propiedad distributiva y la propiedad homogénea:

$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c), \quad (\lambda a) * c = \lambda(a * c).$$

Ejercicio. Encontrar el elemento neutro bajo $*$.

La convolución es una operación binaria en \mathcal{Q}

Corolario

Sean $a, b \in \mathcal{Q}$. Entonces $a * b \in \mathcal{Q}$.

Ejercicio. Demostrar que la operación $*$ en \mathcal{Q} es asociativa y conmutativa.

Ejercicio. Demostrar la propiedad distributiva y la propiedad homogénea:

$$(a + b) * c = (a * c) + (b * c), \quad (\lambda a) * c = \lambda(a * c).$$

Ejercicio. Encontrar el elemento neutro bajo $*$.

Conclusión: \mathcal{Q} con la operación $*$ es un álgebra compleja conmutativa con identidad.

Ejercicio. Sean

$$a = (\dots, 0, 0, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, \underline{a_0}, a_1, a_2, a_3, 0, 0, \dots),$$

$$b = e_1 - e_0 = (\dots, 0, \underline{-1}, 1, 0, \dots).$$

Calcular $a * b * b$ de dos maneras equivalentes:

$$(a * b) * b, \quad a * (b * b).$$

Ejercicio. Encontrar a, b en \mathcal{Q} tales que

$$\text{supp}(a * b) \neq \text{supp}(a) + \text{supp}(b).$$

Ejercicio. Sean $a, b \in \mathcal{Q}$,

$$p := \max(\text{supp}(a)), \quad q := \max(\text{supp}(b)).$$

Calcular $(a * b)_{p+q}$.

Ejercicio. Sean $a, b \in \mathcal{Q}$,

$$p := \max(\text{supp}(a)), \quad q := \max(\text{supp}(b)).$$

Calcular $(a * b)_{p+q}$.

Ejercicio. Determinar si el álgebra $(\mathcal{Q}, *)$ tiene divisores de cero.

Sugerencia: usar el ejercicio anterior.

Ejercicio. Sea

$$a = e_0 - \frac{1}{2}e_1 = \left(\dots, 0, \underline{1}, -\frac{1}{2}, 0, \dots \right).$$

Demostrar que no existe b en \mathcal{Q} tal que $a * b = e_0$.

Ejercicio. Explicar que $a * b$ se puede definir para a en $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ y b en \mathcal{Q} .