Aplicación de la convolución a la teoría de probabilidad: densidad de la suma de dos variables aleatorias independientes absolutamente continuas

Unas definiciones necesarias:

Función de distribución de una variable aleatoria. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un *espacio de probabilidad*, i.e. un espacio de medida con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, y sea $\xi \colon \Omega \to \mathbb{R}$ una *variable aleatoria*, i.e. una función $\mathcal{F}$-medible. La *función de distribución* de ξ se define por:

$$F_\xi(x) := \mathbb{P}(\xi \le x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \colon \xi(\omega) \le x\}).$$

La función F_ξ siempre es creciente (en el sentido amplio), $F_\xi(-\infty) = 0$, $F_\xi(+\infty) = 1$.

Función de densidad de una v.a. absolutamente continua. Se dice que ξ es *continua* si F_ξ es continua. Se dice que ξ es *absolutamente continua* si F_ξ se puede escribir en forma

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)\, du,$$

donde $f_\xi \in L^1(\mathbb{R})$. En este caso f_ξ se llama *función de densidad* de ξ.

1. Ejemplo: distribución uniforme en un intervalo. Calcular F_ξ si $f_\xi = \dfrac{1}{b-a} 1_{[a,b]}$.

Media y varianza. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $\xi \colon \Omega$ una variable aleatoria. La *media* de ξ se define por:

$$\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega).$$

La *varianza* de ξ se define por:

$$\operatorname{Var}(\xi) = \mathbb{E}((\xi - \mathbb{E}(\xi))^2).$$

La *desviación típica* de ξ se define como $\sqrt{\operatorname{Var}(\xi)}$.

Si ξ es absolutamente continua, entonces

$$\mathbb{E}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\, f_\xi(x)\, dx, \qquad \operatorname{Var}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}(\xi))^2 f_\xi(x)\, dx.$$

Ejemplo: distribución normal. Se dice que una variable aleatoria continua ξ sigue una *distribución normal* de parámetros a y σ y se denota $\xi \sim N(a,\sigma)$ si su función de densidad está dada por:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

2. Tarea: media y varianza de la distribución normal. Sea ξ una v.a. de distribución normal con parámetros a y σ. Demostrar que $\mathbb{E}(\xi) = a$, y la *desviación típica* de ξ es σ, i.e. $\mathrm{Var}(\xi) = \sigma^2$.

Variables aleatorias independientes. Variables aleatorias ξ y η son *independientes* si su *distribución conjunta*

$$F_{\xi,\eta}(x,y) := \mathbb{P}(\xi \le x \ \wedge \ \eta \le y)$$

cumple la fórmula $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$.

Densidad de distribución conjunta de variables aleatorias independientes. Si ξ y η son variables aleatorias independientes absolutamente continuas, entonces para todo subconjunto medible D de $\mathbb{R}^n$ se cumple la siguiente fórmula:

$$\mathbb{P}((\xi,\eta) \in D) = \iint\limits_D f_\xi(u) f_\eta(v)\, du\, dv.$$

3. Tarea: densidad conjunta de la suma de dos variables aleatorias independientes. Sean ξ y η variables aleatorias independientes absolutamente continuas. Demostrar que $\xi + \eta$ también es absolutamente continua:

$$F_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{\xi+\eta}(u)\, du,$$

donde $f_{\xi+\eta} = f_\xi * f_\eta$, i.e.

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_\xi(x-y) f_\eta(y)\, dy.$$

4. Tarea: suma de dos variables de distribución normal. Sean $\xi, \eta \sim N(0,1)$. Demostrar que $\xi + \eta \sim N(0,2)$.