

El álgebra de convolución $\ell^1(\mathbb{Z})$ y el álgebra de Wiener (un tema de Análisis Armónico)

Egor Maximenko,

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

12 de octubre de 2021

La convolución de dos sucesiones de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$

Lema

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k| = \|a\|_1 \|b\|_1 < +\infty.$$

Más aún, para cada j en \mathbb{Z} ,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k| < +\infty.$$

Demostración

Nos interesa la suma doble

$$S := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|.$$

Demostración

Nos interesa la suma doble

$$S := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|.$$

Como los sumandos son ≥ 0 , podemos cambiar el orden de las sumas:

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|.$$

Demostración

Nos interesa la suma doble

$$S := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|.$$

Como los sumandos son ≥ 0 , podemos cambiar el orden de las sumas:

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|.$$

Hacemos el cambio de variable $q = j - k$:

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} |a_q| |b_k| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k| \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} |a_q| \right) = \|b\|_1 \|a\|_1 < +\infty.$$

Demostración

Nos interesa la suma doble

$$S := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|.$$

Como los sumandos son ≥ 0 , podemos cambiar el orden de las sumas:

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|.$$

Hacemos el cambio de variable $q = j - k$:

$$S = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} |a_q| |b_k| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |b_k| \right) \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} |a_q| \right) = \|b\|_1 \|a\|_1 < +\infty.$$

Como $S < +\infty$, para cada j en \mathbb{Z} es finita la suma $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|$.

La convolución de dos sucesiones de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$

Dadas a, b en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $a * b: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k.$$

La convolución de dos sucesiones de clase $\ell^1(\mathbb{Z})$

Dadas a, b en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $a * b: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$(a * b)_j := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k.$$

Gracias al lema, la serie converge de manera absoluta.

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Demostración.

$$\|a * b\|_1 =$$

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Demostración.

$$\|a * b\|_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \right| \leq$$

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Demostración.

$$\|a * b\|_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \right| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|.$$

La propiedad submultiplicativa para la norma de la convolución

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces $a * b \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y

$$\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1.$$

Demostración.

$$\|a * b\|_1 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k \right| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{j-k}| |b_k|.$$

Por el lema, la última expresión es $\|a\|_1 \|b\|_1$.

Propiedades algebraicas de la convolución en $\ell^1(\mathbb{Z})$

Ejercicio. Sean $a, b, c \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Propiedades algebraicas de la convolución en $\ell^1(\mathbb{Z})$

Ejercicio. Sean $a, b, c \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Ejercicio. Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$a * b = b * a.$$

Propiedades algebraicas de la convolución en $\ell^1(\mathbb{Z})$

Ejercicio. Sean $a, b, c \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Ejercicio. Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$a * b = b * a.$$

Ejercicio. Sea $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Demostrar que

$$a * e_0 = a.$$

Álgebras de Banach

Sea \mathcal{A} un espacio de Banach complejo y al mismo tiempo un álgebra compleja asociativa. Se dice que \mathcal{A} es un álgebra de Banach si la norma en \mathcal{A} tiene propiedad submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \quad \|ab\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|b\|_{\mathcal{A}}.$$

Álgebras de Banach

Sea \mathcal{A} un espacio de Banach complejo y al mismo tiempo un álgebra compleja asociativa. Se dice que \mathcal{A} es un álgebra de Banach si la norma en \mathcal{A} tiene propiedad submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \quad \|ab\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|b\|_{\mathcal{A}}.$$

$\ell^1(\mathbb{Z})$ con la operación $*$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

Series de Fourier y coeficientes de Fourier (repaso)

Para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{kix}.$$

Series de Fourier y coeficientes de Fourier (repaso)

Para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{kix}.$$

Para cada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, definimos $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} f(x) e^{-kix} d\mu(x).$$

Series de Fourier y coeficientes de Fourier (repaso)

Para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{kix}.$$

Para cada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, definimos $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} f(x) e^{-kix} d\mu(x).$$

Sabemos que si $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a$, entonces $a = \hat{f}$.

Series de Fourier y coeficientes de Fourier (repaso)

Para cada a en $\ell^1(\mathbb{Z})$, definimos $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$,

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a)(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{kix}.$$

Para cada f en $L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, definimos $\hat{f} \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$,

$$\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi)} f(x) e^{-kix} d\mu(x).$$

Sabemos que si $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a$, entonces $a = \hat{f}$.

Corolario: la función $\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}$ es inyectiva.

El teorema de convolución para el grupo \mathbb{Z}

Proposición

Sean $a, b \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Entonces

$$\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b) = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a)\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(b).$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) =$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a * b)_j e^{kix}$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a * b)_j e^{kix} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix}.$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a * b)_j e^{kix} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix}.$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) =$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a * b)_j e^{kix} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix}.$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix} =$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a * b)_j e^{kix} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix}.$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} a_q b_k e^{qix} e^{kix}.$$

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a * b)_j e^{kix} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix}.$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} a_q b_k e^{qix} e^{kix}.$$

Obtenemos $(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a)(x) (\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}b)(x)$.

Idea de demostración

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a * b)_j e^{kix} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix}.$$

Cambiamos el orden de las sumas, luego hacemos un cambio de variable.

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(a * b))(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_{j-k} b_k e^{jix} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} a_q b_k e^{qix} e^{kix}.$$

Obtenemos $(\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a)(x) (\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}b)(x)$.

Ejercicio: justificar el cambio del orden de las sumas.

El álgebra de Wiener

$$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(\ell^1(\mathbb{Z})) =$$

El álgebra de Wiener

$$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : \exists a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a\}.$$

El álgebra de Wiener

$$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : \exists a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a\}.$$

Notamos que para cada f en $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, existe una **única** sucesión a en $\ell^1(\mathbb{Z})$ tal que

$$f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a.$$

El álgebra de Wiener

$$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : \exists a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a\}.$$

Notamos que para cada f en $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, existe una **única** sucesión a en $\ell^1(\mathbb{Z})$ tal que

$$f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a.$$

La norma en $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se hereda de $\ell^1(\mathbb{Z})$:

$$\|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a\|_W := \|a\|_1.$$

El álgebra de Wiener

$$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}) := \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}(\ell^1(\mathbb{Z})) = \{f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : \exists a \in \ell^1(\mathbb{Z}) \quad f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a\}.$$

Notamos que para cada f en $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$, existe una **única** sucesión a en $\ell^1(\mathbb{Z})$ tal que

$$f = \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a.$$

La norma en $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ se hereda de $\ell^1(\mathbb{Z})$:

$$\|\mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a\|_W := \|a\|_1.$$

Ejercicio. Explicar la definición de otra forma del álgebra de Wiener: $W(\mathbb{T})$.

Ejercicio.

Demostrar que $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

Indicación: usar el hecho que $\ell^1(\mathbb{Z})$ es un espacio de Banach, pero no usar las propiedades algebraicas de la convolución.

Ejercicio.

Demostrar que $W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach conmutativa con identidad.

Indicación: usar el hecho que $\ell^1(\mathbb{Z})$ es un espacio de Banach, pero no usar las propiedades algebraicas de la convolución.

Ejercicio.

Demostrar las propiedades algebraicas de la convolución, usando el resultado del ejercicio anterior.

Álgebra de convolución \leftrightarrow álgebra de Wiener

álgebra	$\ell^1(\mathbb{Z})$	$W_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$
operación	*	mul. punto a punto
norma	$\ \cdot\ _1$	$\ \mathcal{F}_{\mathbb{Z}}a\ _W = \ a\ _1$
identidad	e_0	$1_{\mathbb{R}}$

Ejemplos de convoluciones

Calcular $a * b$, cuando $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$, para cada uno de los siguientes casos.

Ejemplos de convoluciones

Calcular $a * b$, cuando $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$, para cada uno de los siguientes casos.

- $a_{-1} = a_0 = a_1 = 1/3$, las demás componentes son 0.

Ejemplos de convoluciones

Calcular $a * b$, cuando $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$, para cada uno de los siguientes casos.

- $a_{-1} = a_0 = a_1 = 1/3$, las demás componentes son 0.
- $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, las demás componentes son 0.

Ejemplos de convoluciones

Calcular $a * b$, cuando $b \in \ell^1(\mathbb{Z})$, para cada uno de los siguientes casos.

- $a_{-1} = a_0 = a_1 = 1/3$, las demás componentes son 0.
- $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, las demás componentes son 0.
- $a_{-1} = a_1 = 1$, $a_0 = -2$, las demás componentes son 0.