Conjuntos convexos

Objetivos. Repasar la noción de conjunto convexo en un espacio vectorial real.

Prerrequisitos. Espacios vectoriales, combinaciones lineales.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo. En el estudio de conjuntos convexos siempre nos restringimos a escalares reales; en otras palabras, tratamos V como un espacio vectorial real.

1 Definición (combinación convexa)**.** Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m$ vectores del espacio V. Entonces cualquier vector de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k,$$

donde $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_m \geq 0$ y $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$, se llama *combinación convexa* de los vectores $v_1, \ldots, v_m$.

2 Definición (conjunto convexo)**.** Sea V un espacio vectorial real. Un conjunto $A \subset V$ se llama *convexo* si para todo par de vectores $a, b \in A$ y todo par de escalares $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$, el vector $\lambda a + \mu b$ también pertenece al conjunto A.

3 Proposición (la intersección de conjuntos convexos es convexa)**.** *Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de subconjuntos convexos de V. Pongamos*

$$B = \cap \mathcal{A} = \{x \in V \colon \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad x \in A\}.$$

Entonces B es un conjunto convexo.

Idea de demostración. En la definición del conjunto convexo se usa solamente el cuantificador $\forall$ (no aparece el cuantificador $\exists$), y en la definición de la intersección de una colección de conjuntos también se utiliza solamente el cuantificador $\forall$. Dos cuantificadores $\forall$ conmutan. $\square$

4 Definición (envolvente convexa o envoltura convexa de un conjunto)**.** Sea $X \subseteq V$. La *envolvente convexa* (o *envoltura convexa*) de X es el conjunto de todas las combinaciones convexas de los elementos de X:

$$\operatorname{conv}(X) \coloneqq \left\{ \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k \colon \quad m \in \{1, 2, \ldots\}, \quad v_1, \ldots, v_m \in X, \right.$$
$$\left. \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \right\}.$$

5 Proposición (propiedad monótona de la envoltura convexa)**.** *Sean* $X \subseteq Y \subseteq V$*. Entonces* $\operatorname{conv}(X) \subseteq \operatorname{conv}(Y)$*.*

6 Proposición (cada conjunto está contenido en su envoltura convexa)**.** *Sea* $X \subseteq V$*. Entonces* $X \subseteq \operatorname{conv}(X)$*.*

Demostración. Dado a en X, lo podemos escribir como $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$, donde $m = 1$, $\alpha_1 = 1$, $x_1 = a$. $\square$

7 Proposición (un conjunto convexo coincide con su envoltura convexa)**.** *Sea* $A \subseteq V$ *un conjunto convexo. Entonces* $\operatorname{conv}(A) = A$*.*

Idea de demostración. Tenemos que demostrar que si $m \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, $v_1, \ldots, v_m \in A$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ tales que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k \in A.$$

Inducción matemática sobre m. Notamos que para $\alpha_3 \neq 1$

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3) \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} v_2 \right) + \alpha_3 v_3. \qquad \square$$

Demostración. Para cada m en $\{1, 2, \ldots\}$ denotemos por C_m al siguiente conjunto:

$$C_m \coloneqq \left\{ x \in V \colon \quad \exists v_1, \ldots, v_m \in A \quad \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = x \right\}.$$

Es fácil ver que $\operatorname{conv}(A) = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$. Demostremos por inducción matemática sobre m que $C_m \subseteq A$ para cada m en $\{1, 2, \ldots\}$. Obviamente $C_1 = A$. Supongamos que $C_m \subseteq A$ y demostremos que $C_{m+1} \subseteq A$.

Sean $x \in V$, $v_1, \ldots, v_{m+1} \in A$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \ge 0$ tales que $\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k = 1$ y $x = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k v_k$. Si $\alpha_{m+1} = 1$, entonces $x = v_{m+1} \in A$. Consideremos el caso $\alpha_{m+1} < 1$. Para cada k en $\{1, \ldots, m\}$ pongamos

$$\beta_k = \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_m}, \qquad w := \sum_{k=1}^{m} \beta_k v_k.$$

Entonces $\sum_{k=1}^{m} \beta_k = 1$ y $w \in A$ por la hipótesis de inducción. Luego el vector x se puede escribir como

$$x = (1 - \alpha_{m+1})w + \alpha_{m+1} v_{m+1}.$$

Usando la hipótesis que A es convexo, concluimos que $x \in A$. □

8 Proposición (la envoltura convexa de un conjunto es un conjunto convexo)**.** *Sea* $X \subseteq V$*. Entonces el conjunto* $\operatorname{conv}(X)$ *es convexo.*

Demostración. Sean $a, b \in \operatorname{conv}(X)$ y $\xi, \eta \ge 0$ tales que $\xi + \eta = 1$. Elegimos $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \ge 0$, $\beta_1, \ldots, \beta_q \ge 0$, $x_1, \ldots, x_p \in X$, $y_1, \ldots, y_q \in X$ tales que

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1, \quad \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j = a, \quad \sum_{k=1}^{q} \beta_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{q} \beta_k y_k = 1.$$

Pongamos

$$\gamma_k := \begin{cases} \xi \alpha_k, & k \in \{1, \ldots, p\}, \\ \eta \beta_{k-p}, & k \in \{p+1, \ldots, p+q\}; \end{cases} \qquad z_k := \begin{cases} x_k, & k \in \{1, \ldots, p\}, \\ y_{k-p}, & k \in \{p+1, \ldots, p+q\}. \end{cases}$$

Entonces $z_1, \ldots, z_{p+q} \in X$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{p+q} \ge 0$,

$$\sum_{k=1}^{p+q} \gamma_k = \xi \sum_{k=1}^{p} \alpha_k + \eta \sum_{k=1}^{q} \beta_k = 1,$$

así que

$$\xi a + \eta b = \sum_{k=1}^{p+q} \gamma_k z_k \in \operatorname{conv}(X).$$ □

9 Proposición (criterio de convexidad de un conjunto en términos de su envoltura convexa)**.** *Sea* $X \subseteq V$*. Entonces* X *es convexo si y sólo si* $\operatorname{conv}(X) = X$*.*

10 Proposición (la envoltura convexa está contenida en cualquier conjunto convexo que contiene al conjunto original)**.** *Sea* $X \subseteq X$ *y sea* $A \subseteq V$ *un conjunto convexo tal que* $X \subseteq V$*. Entonces* $\operatorname{conv}(X) \subseteq A$*.*

Demostración. Por las Proposiciones 5 y 7 tenemos $\operatorname{conv}(X) \subseteq \operatorname{conv}(A) = A$. $\square$

En la siguiente proposición comparamos subconjuntos de V por contención (no por la cardinalidad).

11 Proposición (la envoltura convexa de un conjunto es el mínimo entre todos los conjuntos convexos que lo contienen)**.** *Sea* $X \subseteq V$*. Entonces* $\operatorname{conv}(X)$ *es el mínimo elemento de la colección*

$$\big\{A \subseteq V:\quad X \subseteq A \quad \wedge \quad A \textit{ es convexo}\big\}.$$

Demostración. Se sigue de las Proposiciones8, 6 y 10 $\square$

12 Proposición (la envolutura convexa como la intersección de cierta colección de conjuntos convexos)**.** *Sea* $X \subseteq V$*. Pongamos*

$$\mathcal{C} \coloneqq \big\{A \subset V:\quad A \textit{ es convexo} \quad \wedge \quad X \subseteq A\big\}.$$

Entonces $\operatorname{conv}(X) = \cap\mathcal{C}$*.*

13 Proposición (la operación "envoltura convexa" tiene propiedad idempotente)**.** *Sea* $X \subseteq V$*. Entonces*

$$\operatorname{conv}(\operatorname{conv}(X)) = \operatorname{conv}(X).$$