La envoltura convexa del conjunto

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de la envoltura convexa de una lista de vectores.

Prerrequisitos. Combinaciones convexas de una lista de vectores.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo. En el estudio de conjuntos convexos siempre nos restringimos a escalares reales. En otras palabras, tratamos V como un espacio vectorial real.

1 Definición (la envoltura convexa del conjunto)**.** Sea V un espacio vectorial real y sea $X \subseteq V$. La *envolvente convexa* (o *envoltura convexa*) de X es el conjunto de todas las combinaciones convexas de los elementos de X:

$$\operatorname{conv}(X) \coloneqq \Big\{ w \in V\colon \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \exists a_1, \ldots, a_m \in X \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$$
$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = w \Big\}.$$

Para simplificar y entender mejor este concepto, introducimos un concepto auxiliar.

2 Definición. Sean V un espacio vectorial real, $X \subseteq V$ y $m \in \mathbb{N}$. Pongamos

$$\operatorname{conv}_m(X) \coloneqq \Bigg\{ w \in V\colon \quad \exists a_1, \ldots, a_m \in X \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$$
$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = w \right) \Bigg\}.$$

Recordemos la definición de la envoltura convexa de una lista de vectores $a_1, \ldots, a_m$ (la vimos en clases anteriores):

$$\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m) \coloneqq \Bigg\{ w \in V\colon \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$$
$$\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 1 \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = w \right) \Bigg\}.$$

Comparemos estos tres conceptos.

- En todas las tres definiciones varían los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Por supuesto, estos escalares satisfacen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ y $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$.
- En la definición de $\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$ están fijos el número m y los vectores $a_1, \ldots, a_m$.
- En la definición de $\operatorname{conv}_m(X)$ está fijo m, pero varían $a_1, \ldots, a_m$, pertenecientes a X.
- En la definición de $\operatorname{conv}(X)$ varían m y los vectores $a_1, \ldots, a_m$, pertenecientes a X.

Las siguientes dos proposiciones salen de manera trivial de las definiciones de este tema y de la definición de la unión de una familia de conjuntos.

3 Proposición. *Sean V un espacio vectorial real, $X \subseteq V$, $m \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\operatorname{conv}_m(X) = \bigcup_{a_1, \ldots, a_m \in X} \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m).$$

4 Proposición. *Sea V un espacio vectorial real y sea $X \subseteq V$. Entonces*

$$\operatorname{conv}(X) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \operatorname{conv}_m(X).$$

5 Ejercicio. Sea V un espacio vectorial real y sea $X \subseteq V$. Mostrar que $\operatorname{conv}_1(X) = X$.

6 Ejercicio. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ tales que a, b, c son diferentes a pares y no están ubicados en una recta. Pongamos $X := \{a, b, c\}$. Encontrar y dibujar los conjuntos $\operatorname{conv}_1(X)$, $\operatorname{conv}_2(X)$, $\operatorname{conv}_3(X)$, $\operatorname{conv}(X)$.

7 Proposición (la propiedad monótona de la envoltura convexa)**.** *Sean $X \subseteq Y \subseteq V$. Entonces* $\operatorname{conv}(X) \subseteq \operatorname{conv}(Y)$.

Demostración. Sea $w \in \operatorname{conv}(X)$. Entonces existen $m \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_m \in X$ tales que $w \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$. Como $a_1, \ldots, a_m \in Y$, concluimos que $\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m) \subseteq \operatorname{conv}(Y)$ y $w \in \operatorname{conv}(Y)$. □

8 Proposición (cada conjunto está contenido en su envoltura convexa)**.** *Sea $X \subseteq V$. Entonces $X \subseteq$* $\operatorname{conv}(X)$.

Demostración. Por el Ejercicio 5, tenemos que $X = \operatorname{conv}_1(X)$. De la Proposición 4 se sigue que $\operatorname{conv}_1(X) \subseteq \operatorname{conv}(X)$. $\square$

9 Ejercicio (la envoltura convexa de una lista de vectores coincide con la envoltura convexa del conjunto formado por estos vectores)**.** Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(\{a_1, \ldots, a_m\}) = \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m).$$

10 Ejercicio (la propiedad monótona de $\operatorname{conv}_m(X)$ respecto a m)**.** Sean $X \subseteq V$, $m \in \mathbb{N}$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}_m(X) \subseteq \operatorname{conv}_{m+1}(X).$$