Funciones convexas definidas en intervalos y sus derivadas

Objetivos. Estudiar funciones convexas, definidas en intervalos de la recta real. Caracterizar funciones convexas en términos de la primera derivada y en términos de la segunda derivada.

Requisitos. Criterio de función convexa en términos de diferencias divididas, subconjuntos convexos del eje real, derivadas laterales de funciones convexas, funciones crecientes, teorema del valor medio.

1 Teorema (repaso: criterio de la convexidad de una función en términos de sus diferencias divididas del primer y segundo orden)**.** *Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f *es convexa* $\smile$*;*

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ *para todos* $x_1, x_2, x_3 \in X$ *tales que* $x_1 < x_2 < x_3$*;*

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ *para todos* $x_1, x_2, x_3 \in X$ *tales que* $x_1 < x_2 < x_3$*;*

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ *para todos* $x_1, x_2, x_3 \in X$ *tales que* $x_1 < x_2 < x_3$*.*

(e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ *para todos* x_1, x_2, x_3 *en* X*, diferentes a pares.*

2 Proposición (repaso: la propiedad creciente de las derivadas laterales de una función convexa)**.** *Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, f'_{izq} y f'_{der} existen en cada punto de X y son funciones crecientes.*

Criterios de convexidad en términos de las derivadas

3 Teorema (criterio de convexidad de una función en términos de su primera derivada)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua en X y derivable en* $\operatorname{int}(X)$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f *es convexa;*

(b) f' *es creciente en* $\operatorname{int}(X)$*, esto es,*

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{int}(X) \qquad \big(x_1 < x_2\big) \quad \Rightarrow \quad \big(f'(x_1) \le f'(x_2)\big).$$

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Supongamos que f es convexa. Demostremos que f' es creciente. Por la suposición, $f'(x)$ existe para cada x en $\operatorname{int}(X)$. Luego $f'(x) = f'_{\text{izq}}(x)$ para cada x en X, y la conclusión deseada sale de la propiedad creciente de f_{izq}.

(a)$\Rightarrow$(b), un razonamiento modificado. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 < x_2$. Pongamos $d = x_2 - x_1$. Entonces para todo h en $(0, d)$ tenemos que $x_1 + h < x_2$ y $x_1 < x_2 - h$. Por el criterio de la convexidad en términos de las diferencias divididas del primer orden,

$$\Delta_f(x_1, x_1 + h) \le \Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2 - h, x_2).$$

Además

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0^+} \Delta_f(x_1, x_1 + h), \qquad f'(x_2) = \lim_{h \to 0^+} \Delta_f(x_2, x_2 - h),$$

por lo tanto $f'(x_1) \le f'(x_2)$.

(b)$\Rightarrow$(a). Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Por el teorema del valor medio aplicada a la función f en el intervalo $[x_1, x_2]$, existe un punto α tal que $x_1 < \alpha < x_2$ y

$$\Delta_f(x_1, x_2) = f'(\alpha).$$

De manera similar existe un β tal que $x_2 < \beta < x_3$ y

$$\Delta_f(x_2, x_3) = f'(\beta).$$

Como $\alpha < x_2 < \beta$ y f' crece, obtenemos que $f'(\alpha) \le f'(\beta)$ y

$$\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3). \qquad \square$$

4 Teorema (criterio de la convexidad de una función en términos de su segunda derivada)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua en X y dos veces derivable en* $\operatorname{int}(X)$. *Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es convexa;

(b) $f''(x) \ge 0$ para cada x en $\operatorname{int}(X)$.

Idea de demostración. Usar el teorema anterior y aplicar el criterio de función creciente a la función f'. $\square$

5 Ejercicio. Sea X un intervalo y sea $f \in C(X, \mathbb{R})$. Supongamos que f es derivable en $\operatorname{int}(X)$ y f' es estrictamente creciente en $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que f es estrictamente convexa en X.

6 Ejercicio. Sea X un intervalo y sea $f \in C(X, \mathbb{R})$. Supongamos que f es dos veces derivable en $\operatorname{int}(X)$ y $f'' > 0$ en $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que f es estrictamente convexa en X.

7 Ejercicio. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^4$. Demostrar que f es estrictamente convexa en $\mathbb{R}$. Sin embargo, $f''(0) = 0$.

8 Ejercicio. Consideramos la función exponencial como función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$\exp_{\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Sabemos que $\exp_{\mathbb{R}}''(x) = \exp_{\mathbb{R}}(x) > 0$ para cada x en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\exp_{\mathbb{R}}$ es estrictamente convexa. Usando este hecho, demostrar la desigualdad de Young. Hay que escribir la definición de convexidad para $\exp_{\mathbb{R}}$ y hacer un cambio de variables.

9 Ejercicio. Sea $p \geq 1$ y sea $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq x^p.$$

Demostrar que f es convexa. Más aún, si $p > 1$, demostrar que f es estrictamente convexa.