Funciones convexas en intervalos y derivadas laterales

Objetivos. Estudiar las derivadas unilaterales de funciones convexas, definidas en intervalos del eje real.

Requisitos. Conjuntos convexos, combinaciones convexas, subconjuntos convexos del eje real, funciones crecientes y sus límites, funciones convexas.

1 Definición (repaso: definición de la función convexa de una variable real)**.** Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *convexa* si para caulesquiera x, y en $\mathbb{R}$ y cualquier λ en $[0,1]$ se cumple la desigualdad

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \le (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y).$$

2 Ejercicio. Recordar la definicion de la función estrictamente convexa.

3 Teorema (repaso: criterio de la convexidad de una función en términos de sus diferencias divididas del primer y segundo orden)**.** *Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *f es convexa $\smile$;*

(b) *$\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;*

(c) *$\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;*

(d) *$\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.*

(e) *$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ para todos x_1, x_2, x_3 en X, diferentes a pares.*

Funciones convexas y derivadas unilaterales

4 Definición (derivadas unilaterales)**.** Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f\colon X \to \mathbb{R}$ y $x \in X$.

1. Si x no es extremo izquierdo de X, entonces la *derivada izquierda* de f en x se define como el siguiente límite:

$$f'_{\text{izq}}(x) \coloneqq \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

2. Si x no es extremo derecho de X, entonces la *derivada derecha* de f en x se define como el siguiente límite:

$$f'_{\text{der}}(x) \coloneqq \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

5 Proposición (repaso: sobre los límites de una función creciente en los extremos de un intervalo)**.** *Sea Y un intervalo en $\mathbb{R}$, sean $u \coloneqq \inf(Y)$, $v \coloneqq \sup(Y)$, y sea $g\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces*

$$\lim_{\substack{t\to u\\ t>u\\ t\in Y}} g(t) = \inf(g[Y \setminus \{u\}]), \qquad \lim_{\substack{t\to v\\ t<v\\ t\in Y}} g(t) = \sup(g[Y \setminus \{v\}]).$$

6 Ejercicio. Recordar una proposición similar sobre funciones decrecientes y sus límites en los extremos en un intervalo.

7 Proposición (sobre las derivadas laterales de una función convexa)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función convexa. Denotemos por a y b los extremos de X:*

$$a \coloneqq \inf(X), \qquad b \coloneqq \sup(X).$$

1. *Si $x \in X \setminus \{a\}$, entonces existe $f'_{\text{izq}}(x) \in \,]-\infty, +\infty]$ y*
$$f'_{\text{izq}}(x) = \sup_{\substack{t<x\\ t\in X}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$
2. *Si $x \in X \setminus \{b\}$, entonces existe $f'_{\text{der}}(x) \in [-\infty, +\infty[$ y*
$$f'_{\text{der}}(x) = \inf_{\substack{t>x\\ t\in X}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$
3. *Si $x \in \operatorname{int}(X)$, entonces ambas derivadas parciales $f'_{\text{izq}}(x)$ y $f'_{\text{der}}(x)$ son finitas y*
$$f'_{\text{izq}}(x) \le f'_{\text{der}}(x).$$
4. *f'_{izq} es una función creciente en $X \setminus \{a\}$.*
5. *f'_{der} es una función creciente en $X \setminus \{b\}$.*

Demostración. 1. Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$. Pongamos $Y \coloneqq X \cap (-\infty, x)$. En otras palabras,

$$Y = \{t \in X\colon\ t < x\}.$$

Definimos $g\colon Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) \coloneqq \Delta_f(t, x) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Si $t_1, t_2 \in X$ y $t_1 < t_2 < x$, entonces, por la condición (c) en el Teorema 3,

$$\Delta_f(t_1, x) \le \Delta_f(t_2, x).$$

Hemos demostrado que g es creciente. Luego, por la Proposición 5,

$$\lim_{\substack{t\to x\\ t\in Y}} g(t) = \sup_{t\in Y} g(t).$$

El lado izquierdo de esta fórmula es $f'_{\text{izq}}(x)$. Más aún, como Y no es vacío, elegimos t_0 en Y y obtenemos

$$f'_{\text{izq}}(x) = \sup_{t \in Y} g(t) \geq g(t_0) = \Delta_f(t_0, x) > -\infty.$$

2. Se deja como ejercicio.

3. Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si t, u en X y $t < x < u$, entonces, por la condición (d) del Teorema 3,

$$\Delta_f(t, x) \leq \Delta_f(x, u).$$

En esta desigualdad pasamos al límite, cuando t tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \leq \Delta_f(x, u).$$

Ahora pasamos al límite, cuando u tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \leq f'_{\text{der}}(x).$$

Gracias a los incisos 2 y 3, podemos concluir que

$$-\infty < f'_{\text{izq}}(x) \leq f'_{\text{der}}(x) < +\infty.$$

4. Mostremos que f'_{izq} es creciente en $X \setminus \{a\}$. Sean $x_1, x_2 \in X$, $a < x_1 < x_2$. Elegimos t_0 tal que $x_1 < t_0 < x_2$. Entonces, por la condición (d) del Teorema 3,

$$\Delta_f(x_1, t_0) \leq \Delta_f(t_0, x_2).$$

Luego

$$f'_{\text{izq}}(x_1) \leq f'_{\text{der}}(x_1) = \inf_{\substack{t > x_1 \\ t \in X}} \Delta_f(x_1, t) \leq \Delta_f(x_1, t_0) \leq \Delta_f(t_0, x_2) \leq \sup_{\substack{t < x_2 \\ t \in X}} \Delta_f(t, x_2) = f'_{\text{der}}(x_2).$$

5. Se deja como ejercicio. $\square$

8 Ejercicio (sobre la recta básica de la gráfica de una función convexa)**.** Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea x_0 un punto interior de X. Entonces existe un α en $\mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in X \qquad f(x) \geq \alpha(x - x_0) + f(x_0).$$

Indicación: α puede ser cualquier número del intervalo $[f'_{\text{izq}}(x), f'_{\text{der}}(x)]$. Explicar el sentido geométrico.