Funciones convexas de una variable real, criterio en términos de las diferencias divididas

Objetivos. Estudiar criterios de las funciones convexas de una variable real en términos de las diferencias divididas del primer y segundo orden.

Requisitos. Conjuntos convexos, combinaciones convexas, subconjuntos convexos del eje real, funciones convexas, los puntos intermedios de un intervalo son las combinaciones convexas estrictas de los extremos.

Los subconjuntos convexos de los reales

1 Observación (los subconjuntos convexos de los reales son los intervalos, repaso)**.** En las clases anteriores o en los cursos anteriores hemos demostrado el siguiente criterio. Dado $X \subseteq \mathbb{R}$ con $X \neq \varnothing$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- X es convexo,
- X es un intervalo, es decir, X tiene una de las siguientes formas (con $a, b \in \mathbb{R}$):
  $\mathbb{R}, \quad [a, +\infty[\,, \quad]a, +\infty[\,, \quad]-\infty, b], \quad]-\infty, b[\,, \quad [a, b], \quad [a, b[\,, \quad]a, b], \quad]a, b[\,.$
- $]\inf(X), \sup(X)[\, \subseteq X$,
- X es conexo,
- X es arco-conexo.

En este tema vamos a trabajar con funciones $f\colon X \to \mathbb{R}$, donde $X \subseteq \mathbb{R}$, y considerar combinaciones convexas de los puntos del dominio de f. Por eso en varias definiciones y afirmaciones nos importa que X sea convexo. En vez de pedir que X sea convexo, de manera equivalente vamos a pedir que X sea un invervalo.

2 Proposición (los puntos intermedios de un intervalo son las combinaciones convexas estrictas de los extremos)**.** *Sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Pongamos*

$$\lambda \coloneqq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces $\lambda \in \,]0, 1[$ y

$$x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Demostración. La demostración es cálculo directo y se deja como un ejercicio. □

3 Proposición. *Sean $x_1, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_3$ y sea $\lambda \in \,]0, 1[\,$. Pongamos*

$$x_2 \coloneqq (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces $x_1 < x_2 < x_3$,

$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \qquad 1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Demostración. La demostración es cálculo directo y se deja como un ejercicio. □

Definición de funciones convexas, repaso

En general, las funciones convexas se pueden definir sobre subconjuntos convexos de un espacio vectorial real. Recordamos la definición, pero supongamos que el dominio es un intervalo de $\mathbb{R}$.

4 Definición (función convexa de una variable real)**.** Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es llamada *convexa* si para todo par de puntos x_1, x_2 en X y todo λ en $[0,1]$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \le (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \tag{1}$$

5 Observación. Como ya vimos en clases anteriores, la definición se puede escribir en términos de dos escalares $\xi, \eta \ge 0$ tales que $\xi + \eta = 1$. Más aún, para las funciones convexas hemos demostrado la desigualdad finita de Jensen, en la cual aparecen combinaciones convexas de n puntos. Sin embargo, en este tema es cómodo trabajar con un escalar λ, perteneciente a $[0,1]$, y escribir el otro como $1-\lambda$.

6 Observación. Si $x_1 = x_2$ o $\lambda \in \{0,1\}$, entonces la desigualdad (1) se convierte en una igualdad trivial que se cumple para cualquier función f. Por lo tanto, en la definición de función convexa se puede suponer que $x_1 \ne x_2$ y $\lambda \in]0,1[$.

7 Definición (función estrictamente convexa de una variable real)**.** Sea X un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$, esto es, un intervalo de $\mathbb{R}$. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es llamada *estrictamente convexa* si para todo par de puntos x_1, x_2 en X y todo λ en $]0,1[$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2). \tag{2}$$

Repaso: diferencias divididas del primer y segundo orden

8 Definición (diferencias divididas del primer orden y segundo orden de una función)**.** Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Las diferencias divididas de primer orden de f se definen mediante la siguiente regla, donde $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \ne x_2$:

$$\Delta_f(x_1, x_2) \coloneqq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

Las diferencias divididas de segundo orden se definen como

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \coloneqq \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1},$$

donde los puntos x_1, x_2, x_3 pertenecen a X y son diferentes a pares.

9 Proposición (diferencias divididas del primer orden como combinaciones lineales de los valores de la función, repaso)**.** *Hemos visto que* $\Delta_f(x_1, x_2)$ *se escribe como la siguiente combinación lineal de los valores de* f*:*

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{3}$$

La fórmula (3) implica que la expresión $\Delta_f(x_1, x_2)$ es simétrica respecto a sus argumentos x_1 y x_2:

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \Delta_f(x_2, x_1).$$

10 Proposición (diferencias divididas del segundo orden como combinaciones lineales de los valores de la función, repaso)**.** *$\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ se escribe como una combinación lineal de $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, con coeficientes que dependen de x_1, x_2, x_3:*

$$\begin{aligned}\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} f(x_1) + \frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} f(x_2) \\ + \frac{1}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} f(x_3).\end{aligned} \tag{4}$$

Esta fórmula implica que la expresión $\Delta_f(x_1, x_2)$ es simétrica respecto a sus argumentos x_1 y x_2:

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \Delta_f(x_1, x_3, x_2) = \Delta_f(x_2, x_1, x_3) = \ldots.$$

Criterio de funciones convexas en términos de las diferencias divididas del primer y segundo orden

11 Lema. *Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$, sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función y sean $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Entonces las siguientes desigualdades son equivalentes.*

(a) $f(x_2) \le \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3)$.

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$.

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$.

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$.

(e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$.

Demostración. Demostremos una parte de las implicaciones. Las demás se dejan como ejercicios.

(a)⇒(d). Supongamos que se cumple (a). Escribimos $f(x_2)$ como $1 \cdot f(x_2)$ y representamos 1 como la suma de los dos coeficientes en el lado derecho de (a):

$$\left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \right) f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Reagrupamos los términos:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \big(f(x_2) - f(x_1) \big) \le \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \big(f(x_3) - f(x_2) \big).$$

Multiplicamos por $x_3 - x_1$, luego dividimos entre $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$. Obtenemos (c).

(d)$\Rightarrow$(a). Supongamos (d). Escribimos las diferencias divididas en su forma explícita:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Multiplicamos la desigualdad por $(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)$ y dividimos entre $x_3 - x_1$:

$$\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\big(f(x_2) - f(x_1)\big) \le \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\big(f(x_3) - f(x_2)\big).$$

Reagrupamos los términos:

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\right) f(x_2) \le \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

La suma de los dos cocientes en el lado izquierdo es 1, así que obtuvimos (a).

(d)$\Rightarrow$(e). Supongamos (d):

$$\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3).$$

Recordamos la definición de $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ y obtenemos la desigualdad requerida (e):

$$\Delta_f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \ge 0.$$

(e)$\Rightarrow$(d). Supongamos que se cumple (e):

$$\frac{\Delta_f(x_2, x_3) - \Delta_f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1} \ge 0.$$

Multiplicamos ambos lados por $x_3 - x_1$ y obtenemos (d). $\square$

12 Ejercicio. Demostrar las implicaciones (a)$\Rightarrow$(b), (b)$\Rightarrow$(a), (a)$\Rightarrow$(c), (c)$\Rightarrow$(a).

13 Teorema (criterio de la convexidad de una función en términos de sus diferencias divididas del primer y segundo orden)**.** *Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es convexa $\smile$;

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$;

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ para todos $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$.

(e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ para todos x_1, x_2, x_3 en X, diferentes a pares.

Demostración. Todo el trabajo técnico ya está hecho, falta solamente entender la lógica. Demostremos una parte de las implicaciones. Las demás se dejan como ejercicios.

(a)⇒(b). Supongamos que f es convexa. Sean x_1, x_2, x_3 en X tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Definimos λ como

$$\lambda \coloneqq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}.$$

Entonces, por la Proposición 2, $\lambda \in]0, 1[$ y $x_2 = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3$. Por la suposición que f es convexa, tenemos

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

Esta desigualdad se convierte en

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_2).$$

Luego, por la implicación (a)⇒(b) del Lema 11, concluimos que $\Delta_f(x_1, x_2) \leq \Delta_f(x_1, x_3)$.

(b)⇒(a). Supongamos que se cumple (b). Queremos demostrar que f es convexa. Sean elegimos dos puntos en X, los denotamos por x_1, x_3. Consideremos solamente el caso $x_1 < x_3$, porque el caso $x_1 = x_3$ es trivial y el caso $x_1 > x_3$ es similar. Sea $\lambda \in [0, 1]$. Los casos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$ son triviales, por eso suponemos que $0 < \lambda < 1$. Definimos x_2 como

$$x_2 \coloneqq (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3.$$

Entonces, por la Proposición 3, tenemos $x_1 < x_2 < x_3$,

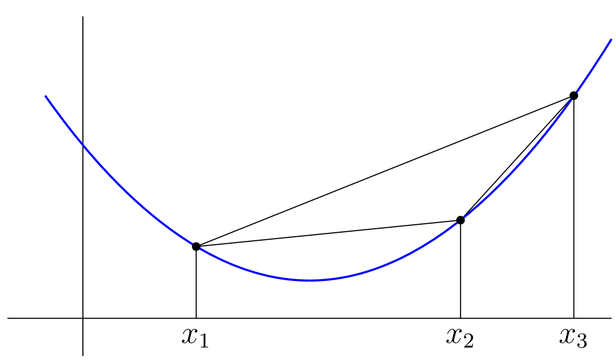
$$\lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}, \qquad 1 - \lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}.$$

Aplicamos la implicación (b)⇒(a) del Lema 11 y escribimos la desigualdad (a) del Lema 11 como

$$f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_3) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_3).$$

(a)⇒(e). Si $x_1 < x_2 < x_3$, entonces la implicación está demostrada en el Lema 11. En otro caso, usamos la simetría de $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ respecto x_1, x_2, x_3 y ordenamos los puntos x_1, x_2, x_3 como sea necesario. □

El dibujo ilustra el sentido geométrico de las condiciones (b), (c) y (d) del Teorema 13. La diferencia dividida $\Delta_f(x_1, x_2)$ es la pendiente de la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $f(x_2, f(x_2))$. Las diferencias divididas $\Delta_f(x_1, x_3)$ y $\Delta_f(x_2, x_3)$ tienen un sentido similar.



14 Ejercicio. Demostrar un teorema similar que caracterice las funciones estrictamente convexas.

15 Ejercicio. Para la función $f(t) \coloneqq t^3$ con $t \geq 0$, simplificar $\Delta_f(x_1, x_2, x_3)$ y demostrar que f es convexa. No usar las derivadas.