Funciones convexas de una variable real y derivadas

Objetivos. Estudiar las derivadas unilaterales de funciones convexas, definidas en intervalos del eje real. Caracterizar funciones convexas en términos de la primera derivada y en términos de la segunda derivada.

Requisitos. Conjuntos convexos, combinaciones convexas, subconjuntos convexos del eje real, funciones crecientes, funciones convexas, teorema del valor medio.

1 Teorema (repaso: criterio de la convexidad de una función en términos de sus diferencias divididas del primer y segundo orden)**.** *Sea X un intervalo de $\mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f *es convexa* $\smile$*;*

(b) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_1, x_3)$ *para todos* $x_1, x_2, x_3 \in X$ *tales que* $x_1 < x_2 < x_3$*;*

(c) $\Delta_f(x_1, x_3) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ *para todos* $x_1, x_2, x_3 \in X$ *tales que* $x_1 < x_2 < x_3$*;*

(d) $\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3)$ *para todos* $x_1, x_2, x_3 \in X$ *tales que* $x_1 < x_2 < x_3$.

(e) $\Delta_f(x_1, x_2, x_3) \ge 0$ *para todos* x_1, x_2, x_3 *en* X*, diferentes a pares.*

Funciones convexas y derivadas unilaterales

2 Definición (derivadas unilaterales)**.** Sean $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, $f\colon X \to \mathbb{R}$ y $x \in X$.

1. Si x no es extremo izquierdo de I, entonces la *derivada izquierda* de f en x se define como el siguiente límite:
$$f'_{\text{izq}}(x) \coloneqq \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

2. Si x no es extremo derecho de I, entonces la *derivada derecha* de f en x se define como el siguiente límite:
$$f'_{\text{der}}(x) \coloneqq \lim_{\substack{t \to x \\ t > x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

3 Proposición (repaso: sobre los límites de una función creciente en los extremos de un intervalo)**.** *Sea Y un intervalo en $\mathbb{R}$, sean $u \coloneqq \inf(Y)$, $v \coloneqq \sup(Y)$, y sea $g\colon Y \to \overline{\mathbb{R}}$. Entonces*
$$\lim_{\substack{t \to u \\ t > u \\ t \in Y}} g(t) = \inf(g[Y \setminus \{u\}]), \qquad \lim_{\substack{t \to v \\ t < v \\ t \in Y}} g(t) = \sup(g[Y \setminus \{v\}]).$$

4 Ejercicio. Recordar una proposición similar sobre funciones decrecientes y sus límites en los extremos en un intervalo.

5 Proposición (sobre las derivadas laterales de una función convexa). *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f: X \to \mathbb{R}$ una función convexa. Denotemos por a y b los extremos de X:*

$$a \coloneqq \inf(X), \qquad b \coloneqq \sup(X).$$

1. *Si $x \in X \setminus \{a\}$, entonces existe $f'_{\mathrm{izq}}(x) \in (-\infty, +\infty]$ y*

$$f'_{\mathrm{izq}}(x) = \sup_{\substack{t<x\\ t\in X}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

2. *Si $x \in X \setminus \{b\}$, entonces existe $f'_{\mathrm{der}}(x) \in [-\infty, +\infty)$ y*

$$f'_{\mathrm{der}}(x) = \inf_{\substack{t>x\\ t\in X}} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

3. *Si $x \in \operatorname{int}(X)$, entones ambas derivadas parciales $f'_{\mathrm{izq}}(x)$ y $f'_{\mathrm{der}}(x)$ son finitas y*

$$f'_{\mathrm{izq}}(x) \le f'_{\mathrm{der}}(x).$$

4. *f'_{izq} es una función creciente en $X \setminus \{a\}$.*

5. *f'_{der} es una función creciente en $X \setminus \{b\}$.*

Demostración. 1. Supongamos que $x \in X \setminus \{a\}$. Pongamos $Y \coloneqq X \cap (-\infty, x)$. En otras palabras,

$$Y = \{t \in X \colon\ t < x\}.$$

Definimos $g: Y \to \mathbb{R}$,

$$g(t) \coloneqq \Delta_f(t,x) = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}.$$

Si $t_1, t_2 \in X$ y $t_1 < t_2 < x$, entonces, por la condición (c) en el Teorema 1,

$$\Delta_f(t_1,x) \le \Delta_f(t_2,x).$$

Hemos demostrado que g es creciente. Luego, por la Proposición 3,

$$\lim_{\substack{t\to x\\ t\in Y}} g(t) = \sup_{t\in Y} g(t).$$

El lado izquierdo de esta fórmula es $f'_{\mathrm{izq}}(x)$. Más aún, como Y no es vacío, elegimos t_0 en Y y obtenemos

$$f'_{\mathrm{izq}}(x) = \sup_{t\in Y} g(t) \ge g(t_0) = \Delta_f(t_0,x) > -\infty.$$

2. Se deja como ejercicio.

3. Sea $x \in \operatorname{int}(X)$. Si t, u en X y $t < x < u$, entonces, por la condición (d) del Teorema 1,

$$\Delta_f(t, x) \leq \Delta_f(x, u).$$

En esta desigualdad pasamos al límite, cuando t tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \leq \Delta_f(x, u).$$

Ahora pasamos al límite, cuando u tiende a x:

$$f'_{\text{izq}}(x) \leq f'_{\text{der}}(x).$$

Gracias a los incisos 2 y 3, podemos concluir que

$$-\infty < f'_{\text{izq}}(x) \leq f'_{\text{der}}(x) < +\infty.$$

4. Mostremos que f'_{izq} es creciente en $X \setminus \{a\}$. Sean $x_1, x_2 \in X$, $a < x_1 < x_2$. Elegimos t_0 tal que $x_1 < t_0 < x_2$. Entonces, por la condición (d) del Teorema 1,

$$\Delta_f(x_1, t_0) \leq \Delta_f(t_0, x_2).$$

Luego

$$f'_{\text{izq}}(x_1) \leq f'_{\text{der}}(x_1) = \inf_{\substack{t > x_1 \\ t \in X}} \Delta_f(x_1, t) \leq \Delta_f(x_1, t_0) \leq \Delta_f(t_0, x_2) \leq \sup_{\substack{t < x_2 \\ t \in X}} \Delta_f(t, x_2) = f'_{\text{der}}(x_2).$$

5. Se deja como ejercicio. □

6 Ejercicio (sobre la recta básica de la gráfica de una función convexa)**.** Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo, sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea x_0 un punto interior de X. Entonces existe un α en $\mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in X \qquad f(x) \geq \alpha(x - x_0) + f(x_0).$$

Indicación: α puede ser cualquier número del intervalo $\alpha \in [f'_{\text{izq}}(x), f'_{\text{der}}(x)]$. Explicar el sentido geométrico.

Criterios de convexidad en términos de las derivadas

7 Teorema (criterio de convexidad de una función en términos de su primera derivada)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua en X y derivable en* $\operatorname{int}(X)$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f *es convexa;*

(b) f' *es creciente en* $\operatorname{int}(X)$*, esto es,*

$$\forall x_1, x_2 \in \operatorname{int}(X) \qquad \big(x_1 < x_2\big) \quad \Rightarrow \quad \big(f'(x_1) \le f'(x_2)\big).$$

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que f es convexa. Demostremos que f' es creciente. Por la suposición, $f'(x)$ existe para cada x en $\operatorname{int}(X)$. Luego $f'(x) = f'_{\text{izq}}(x)$ para cada x en X, y la conclusión deseada sale del inciso 4 de la Proposición 5.

(a)⇒(b), un razonamiento modificado. Sean $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 < x_2$. Pongamos $d = x_2 - x_1$. Entonces para todo h en $(0, d)$ tenemos que $x_1 + h < x_2$ y $x_1 < x_2 - h$. Por el criterio de la convexidad en términos de las diferencias divididas del primer orden,

$$\Delta_f(x_1, x_1 + h) \le \Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2 - h, x_2).$$

Además

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0^+} \Delta_f(x_1, x_1 + h), \qquad f'(x_2) = \lim_{h \to 0^+} \Delta_f(x_2, x_2 - h),$$

por lo tanto $f'(x_1) \le f'(x_2)$.

(b)⇒(a). Sean $x_1, x_2, x_3 \in X$ tales que $x_1 < x_2 < x_3$. Por el teorema del valor medio aplicada a la función f en el intervalo $[x_1, x_2]$, existe un punto α tal que $x_1 < \alpha < x_2$ y

$$\Delta_f(x_1, x_2) = f'(\alpha).$$

De manera similar existe un β tal que $x_2 < \beta < x_3$ y

$$\Delta_f(x_2, x_3) = f'(\beta).$$

Como $\alpha < x_2 < \beta$ y f' crece, obtenemos que $f'(\alpha) \le f'(\beta)$ y

$$\Delta_f(x_1, x_2) \le \Delta_f(x_2, x_3).$$

□

8 Teorema (criterio de la convexidad de una función en términos de su segunda derivada)**.** *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua en X y dos veces derivable en* $\operatorname{int}(X)$*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f *es convexa;*

(b) $f''(x) \ge 0$ *para cada* x *en* X*.*

Idea de demostración. Usar el teorema anterior y aplicar el criterio de función creciente a la función f'. $\square$

9 Ejercicio. Sea X un intervalo y sea $f \in C(X, \mathbb{R})$. Supongamos que f es derivable en $\operatorname{int}(X)$ y f' es estrictamente creciente en X. Demostrar que f es estrictamente convexa en X.

10 Ejercicio. Sea X un intervalo y sea $f \in C(X, \mathbb{R})$. Supongamos que f es dos veces derivable en $\operatorname{int}(X)$ y $f'' > 0$ en $\operatorname{int}(X)$. Demostrar que f es estrictamente convexa en X.

11 Ejercicio. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^4$. Demostrar que f es estrictamente convexa en $\mathbb{R}$. Sin embargo, $f''(0) = 0$.

12 Ejercicio. Consideramos la función exponencial como función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$:

$$\exp_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \exp_{\mathbb{R}}(x) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Demostrar que $\exp_{\mathbb{R}}$ es estrictamente creciente. Demostrar la desiguladad de Young: escribir la definición de convexidad para $\exp_{\mathbb{R}}$ y hacer un cambio de variables.

13 Ejercicio. Sea $p \geq 1$ y sea $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$,

$$f(x) \coloneqq x^p.$$

Demostrar que f es convexa. Más aún, si $p > 1$, demostrar que f es estrictamente convexa.