Funciones convexas

Objetivos. Estudiar criterios y propiedades de las funciones convexas definidas en subconjuntos convexos de espacios vectoriales reales.

Requisitos. Conjuntos convexos, combinaciones convexas.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial real.

1 Ejercicio. Sean $x_1, x_2 \in V$, sean $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ y sea $\lambda \in [0,1]$. Encuentre un punto (z, w) en $V \times \mathbb{R}$ tal que

$$(z, w) - (x_1, y_1) = \lambda\big((x_2, y_2) - (x_1, y_1)\big).$$

Explique el sentido geométrico del punto (z, w). Haga un dibujo para $V = \mathbb{R}$.

2 Definición (función convexa)**.** Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V. Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ se llama *convexa*, si para cada par de puntos x_1, x_2 en A y cada λ en $[0,1]$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \le (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

3 Observación. Otra forma equivalente: para cada par de puntos x_1, x_2 en A y cada $\xi_1, \xi_2 \ge 0$ tales que $\xi_1 + \xi_2 = 1$,

$$f(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2) \le \xi_1 f(x_1) + \xi_2 f(x_2).$$

4 Ejercicio. Explique el sentido geométrico de la convexidad de una función.

5 Ejercicio. Demuestre que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida mediante $f(x, y) = x^2 + y^2$, es convexa.

6 Ejercicio (la suma de dos funciones convexas)**.** Sean $f, g\colon V \to \mathbb{R}$ funciones convexas. Demuestre que la función $f + g$ es convexa.

7 Ejercicio (un múltiplo positivo de una función convexa)**.** Sea $f\colon V \to \mathbb{R}$ una función convexa y sea $\alpha \ge 0$. Demuestre que la función αf es convexa.

8 Ejercicio (combinación lineal con coeficientes positivos de funciones convexas)**.** Sean $m \in \{1, 2, \ldots\}$, $f_1, \ldots, f_m\colon V \to \mathbb{R}$ funciones convexas y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \ge 0$. Demuestre que la función $\sum_{k=1}^m \alpha_k f_k$ es convexa. Por consecuencia, el conjunto de las funciones convexas es un cono convexo.

9 Ejercicio (diferencia de dos funciones convexas)**.** Construya dos funciones convexas $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que su diferencia $f - g$ no sea convexa.

Criterio de la convexidad de una función en términos de su epigrafo

10 Definición (el epigrafo de una función)**.** Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. El *epigrafo* de la función f es el siguiente subconjunto de $V \times \mathbb{R}$:

$$\operatorname{epi}(f) \coloneqq \Big\{(x,y) \in V \times \mathbb{R}\colon \quad x \in A, \quad y \ge f(x)\Big\}.$$

11 Ejercicio. Dibuje los epigrafos de las siguientes funciones:

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq x^2$.
2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \coloneqq -|x|$.

12 Observación. En la definición de epigrafo, V y $\mathbb{R}$ son espacios vectoriales reales. Por lo tanto, $V \times \mathbb{R}$ también se puede considerar como un espacio vectorial real, con las operaciones definidas componente a componente:

$$(a,x) + (b,y) \coloneqq (a+b, x+y); \qquad \lambda(a,x) \coloneqq (\lambda x, \lambda x).$$

13 Proposición (criterio de que una función es convexa, en términos de su epigrafo)**.** *Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) f es convexa.

(b) el epigrafo $\operatorname{epi}(f)$ de la función f es un subconjunto convexo de $V \times \mathbb{R}$.

Desigualdad de Jensen finita

14 Teorema (la desigualdad de Jensen finita, sobre el valor de una función convexa en una combinación convexa)**.** *Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sean $m \in \{1,2,\ldots\}$, $x_1,\ldots,x_m \in A$ y $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \ge 0$ tales que $\sum_{j=1}^m \lambda_j = 1$. Entonces,*

$$f\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j\right) \le \sum_{j=1}^k \lambda_j f(x_j).$$

Idea de demostración. Inducción matemática sobre m. Note que si $\lambda_3 < 1$, entonces

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (1-\lambda_3)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_3} x_1 + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_3} x_2\right) + \lambda_3 x_3.$$

Para m general, cuando pasamos de m a $m+1$, se recomienda considerar dos casos: $\lambda_{m+1} = 1$ y $\lambda_{m+1} < 1$. $\square$

Funciones estrictamente convexas

15 Definición (función estrictamente convexa)**.** Sea A un subconjunto convexo de un espacio vectorial real V. Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ se llama *estrictamente convexa*, si para cada par de puntos x_1, x_2 en A, tales que $x_1 \neq x_2$, y cada λ en $]0,1[$,

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) < (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

16 Teorema (la desigualdad de Jensen finita estricta)**.** *Sea V un espacio vectorial real, sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa. Entonces, para cada m en $\mathbb{N}$ con $m \geq 2$, cada $x_1, \ldots, x_m$ en A tales que no todos $x_1, \ldots, x_m$ son iguales, y cada $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ tales que $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$, se cumple la siguiente desigualdad:*

$$f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right) < \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k).$$

Idea de demostración. La demostración es muy similar a la demostración del Teorema 14. Cuando pasamos de m a $m+1$, se recomienda considerar dos casos:

- $x_1 = \cdots = x_m$ (en este caso $x_1 \neq x_{m+1}$);
- $x_1, \ldots, x_m$ no todos son iguales.

En cada uno de los dos casos, hay que explicar bien, cómo se obtiene la desigualdad estricta. □

17 Corolario (criterio de igualdad en la desigualdad de Jensen finita para funciones estrictamente convexas)**.** *Sea V un espacio vectorial real, sea A un subconjunto convexo de V y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa. Entonces, para cada m en $\mathbb{N}$ con $m \geq 2$, cada $x_1, \ldots, x_m$ en A y cada $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ tales que $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$, si se cumple la igualdad*

$$f\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^m \lambda_k f(x_k), \tag{1}$$

entonces $x_1 = \cdots = x_m$.

18 Ejercicio. Demostrar el Corolario 17 por inducción sobre m, sin usar el Teorema 16. Recordar la idea de demostración del Teorema 14:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j x_j\right) &\leq (1-\lambda_{m+1}) f\left(\sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{1-\lambda_{m+1}}\, x_j\right) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j f(x_j). \end{aligned} \tag{2}$$

Si suponemos un análogo de (1) para $m+1$, entonces las dos desigualdades en (2) se convierten en igualdades.