Combinaciones convexas (un tema de análisis)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

23 de julio de 2024

Objetivos:

- estudiar propiedades básicas de combinaciones convexas de una lista de vectores;
- estudiar el conjunto de las combinaciones convexas de una lista de vectores:

$$\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m).$$

Análisis convexo

Las combinaciones convexas sirven para estudiar los siguientes conceptos:

- conjuntos convexos,
- envolturas convexas,
- funciones convexas.

El área de matemáticas que estudia estos conceptos se llama análisis convexo.

Aplicaciones de análisis convexo

- Muchas desigualdades en análisis.
- Teoría de espacios normados.
- Optimización.
- Aprendizaje automático.
- Topología algebraica.

Prerrequisitos

- Espacios vectoriales.

Prerrequisitos

- Espacios vectoriales.
- Combinaciones lineales.

Espacio vectorial

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo.

Más general, V puede ser un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$,
donde $\mathbb{F}$ es un campo que contiene $\mathbb{R}$.

En el estudio de combinaciones convexas siempre nos restringimos a escalares reales.

En otras palabras, tratamos V como un espacio vectorial real.

Combinaciones lineales, afines, convexas

Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$.

Combinaciones lineales, afines, convexas

Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$.

Combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$: cualquier vector de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k, \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}.$$

Combinaciones lineales, afines, convexas

Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$.

Combinación lineal de $v_1, \ldots, v_m$: cualquier vector de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k, \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}.$$

Combinación afín: caso particular, con $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.

Combinaciones lineales, afines, convexas

Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \dots, v_m \in V$.

Combinación lineal de $v_1, \dots, v_m$: cualquier vector de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k, \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}.$$

Combinación afín: caso particular, con $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$.

Combinación convexa: caso particular de combinación afín, con $\alpha_1, \dots, \alpha_m \geq 0$

Definición: combinación convexa de una lista de vectores

Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$.

Un vector w se llama combinación convexa de $v_1, \ldots, v_m$,
si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1, \qquad w = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k.$$

La envoltura convexa de una lista de vectores

Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$.

La envoltura convexa de una lista de vectores

Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$.

$\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m) :=$ el conjunto de todas las combinaciones convexas de los vectores $v_1, \ldots, v_m$.

La envoltura convexa de una lista de vectores

Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$.

$\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m) :=$ el conjunto de todas las combinaciones convexas de los vectores $v_1, \ldots, v_m$.

Más formalmente,

$$\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m) := \left\{ w \in V : \quad \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0 \quad \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = w \right) \right\}.$$

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \left\{ w \in V : \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \right\}.$$

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \Big\{ w \in V : \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \Big\}.$$

Idea de demostración.

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \Big\{ w \in V : \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \Big\}.$$

Idea de demostración.

$\Rightarrow$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Pongamos λ

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \Big\{ w \in V : \quad \exists \lambda \in [0, 1] \quad w = (1 - \lambda) v_1 + \lambda v_2 \Big\}.$$

Idea de demostración.

$\Rightarrow$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Pongamos $\lambda =$

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \Big\{ w \in V \colon \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \Big\}.$$

Idea de demostración.

$\Rightarrow$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.
Pongamos $\lambda = \alpha_2$.

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \Big\{ w \in V : \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \Big\}.$$

Idea de demostración.

$\Rightarrow$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.
Pongamos $\lambda = \alpha_2$.

$\Leftarrow$. Sean $\lambda \in [0,1]$, $w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$.
Pongamos α_1

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \Big\{ w \in V : \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \Big\}.$$

Idea de demostración.

$\Rightarrow$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.
Pongamos $\lambda = \alpha_2$.

$\Leftarrow$. Sean $\lambda \in [0,1]$, $w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$.
Pongamos $\alpha_1 =$

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \Big\{ w \in V : \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \Big\}.$$

Idea de demostración.

$\Rightarrow$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.
Pongamos $\lambda = \alpha_2$.

$\Leftarrow$. Sean $\lambda \in [0,1]$, $w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$.
Pongamos $\alpha_1 = 1 - \lambda$, α_2

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \Big\{ w \in V : \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \Big\}.$$

Idea de demostración.

$\Rightarrow$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.
Pongamos $\lambda = \alpha_2$.

$\Leftarrow$. Sean $\lambda \in [0,1]$, $w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$.
Pongamos $\alpha_1 = 1 - \lambda$, $\alpha_2 =$

Combinaciones convexas de dos vectores

Proposición

Sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces,

$$\mathrm{conv}(v_1, v_2) = \Big\{ w \in V : \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \Big\}.$$

Idea de demostración.

$\Rightarrow$. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.
Pongamos $\lambda = \alpha_2$.

$\Leftarrow$. Sean $\lambda \in [0,1]$, $w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$.
Pongamos $\alpha_1 = 1 - \lambda$, $\alpha_2 = \lambda$.

Combinaciones convexas de dos números reales

Proposición

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Entonces,

$$\operatorname{conv}(x, y) = [x, y].$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

Idea de demostración, $\mathrm{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \leq z \leq y,$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \leq z \leq y, \qquad \text{por eso}$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \leq z \leq y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \leq z - x \leq y - x.$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \leq z \leq y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \leq z - x \leq y - x.$$

Pongamos

$$\lambda$$

Idea de demostración, $\mathrm{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \le z \le y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \le z - x \le y - x.$$

Pongamos

$$\lambda :=$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \le z \le y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \le z - x \le y - x.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{z - x}{y - x}.$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \le z \le y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \le z - x \le y - x.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{z - x}{y - x}.$$

Luego

$$(1 - \lambda)x + \lambda y$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \le z \le y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \le z - x \le y - x.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{z - x}{y - x}.$$

Luego

$$(1 - \lambda)x + \lambda y =$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \le z \le y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \le z - x \le y - x.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{z - x}{y - x}.$$

Luego

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \frac{y - z}{y - x}\,x + \frac{z - x}{y - x}\,y$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \le z \le y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \le z - x \le y - x.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{z - x}{y - x}.$$

Luego

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \frac{y - z}{y - x}\, x + \frac{z - x}{y - x}\, y =$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \le z \le y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \le z - x \le y - x.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{z - x}{y - x}.$$

Luego

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \frac{y - z}{y - x}\,x + \frac{z - x}{y - x}\,y = \frac{xy - xz + yz - xy}{y - x}$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \le z \le y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \le z - x \le y - x.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{z - x}{y - x}.$$

Luego

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \frac{y - z}{y - x}\,x + \frac{z - x}{y - x}\,y = \frac{xy - xz + yz - xy}{y - x} =$$

Idea de demostración, $\operatorname{conv}(x, y) \supseteq [x, y]$

Sea $z \in [x, y]$.

$$x \leq z \leq y, \qquad \text{por eso} \qquad 0 \leq z - x \leq y - x.$$

Pongamos

$$\lambda := \frac{z - x}{y - x}.$$

Luego

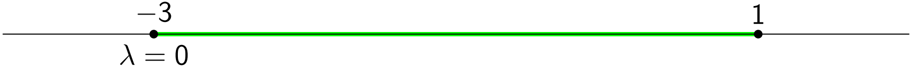
$$(1 - \lambda)x + \lambda y = \frac{y - z}{y - x}x + \frac{z - x}{y - x}y = \frac{xy - xz + yz - xy}{y - x} = z.$$

Combinaciones convexas de dos números reales, ejemplo

$$z = (1 - \lambda) \cdot (-3) + \lambda \cdot 1 = -3 + 4\lambda$$

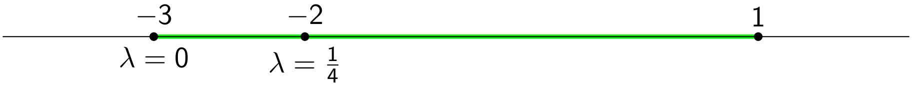
Combinaciones convexas de dos números reales, ejemplo

$$z = (1 - \lambda) \cdot (-3) + \lambda \cdot 1 = -3 + 4\lambda$$



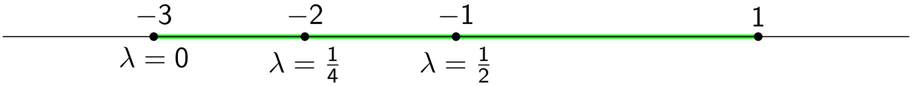
Combinaciones convexas de dos números reales, ejemplo

$$z = (1 - \lambda) \cdot (-3) + \lambda \cdot 1 = -3 + 4\lambda$$



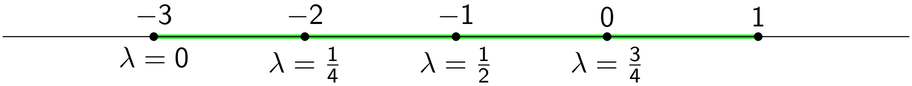
Combinaciones convexas de dos números reales, ejemplo

$$z = (1-\lambda)\cdot(-3) + \lambda \cdot 1 = -3 + 4\lambda$$



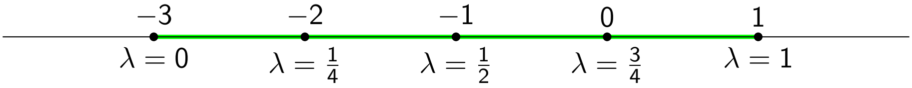
Combinaciones convexas de dos números reales, ejemplo

$$z = (1-\lambda)\cdot(-3) + \lambda\cdot 1 = -3 + 4\lambda$$

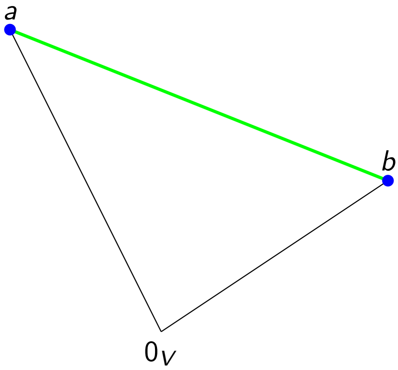


Combinaciones convexas de dos números reales, ejemplo

$$z = (1-\lambda)\cdot(-3) + \lambda\cdot 1 = -3 + 4\lambda$$



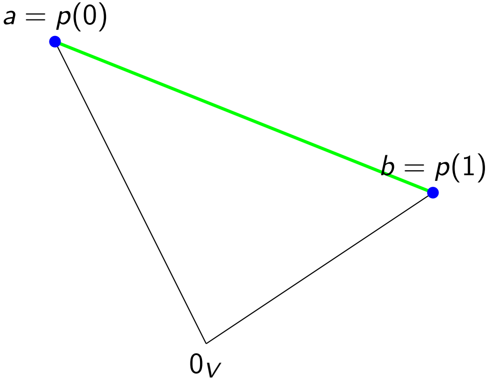
Combinaciones convexas de dos puntos en el plano



$$p(\lambda) := (1-\lambda)a + \lambda b$$

$$p(\lambda) = a + \lambda(b-a)$$

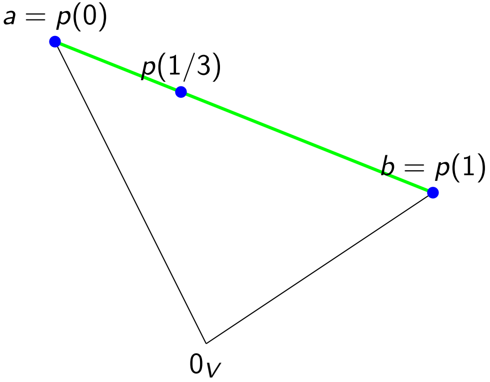
Combinaciones convexas de dos puntos en el plano



$$p(\lambda) := (1-\lambda)a + \lambda b$$

$$p(\lambda) = a + \lambda(b-a)$$

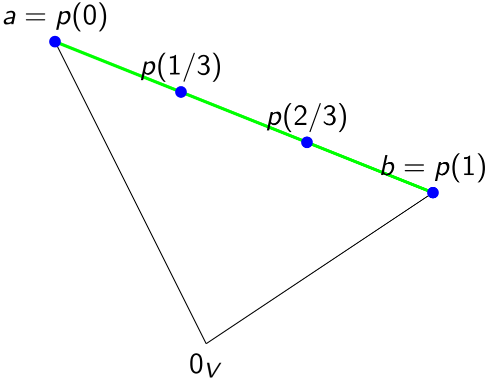
Combinaciones convexas de dos puntos en el plano



$$p(\lambda) := (1-\lambda)a + \lambda b$$

$$p(\lambda) = a + \lambda(b-a)$$

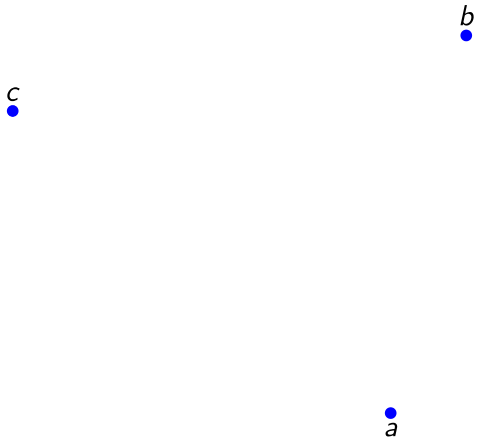
Combinaciones convexas de dos puntos en el plano



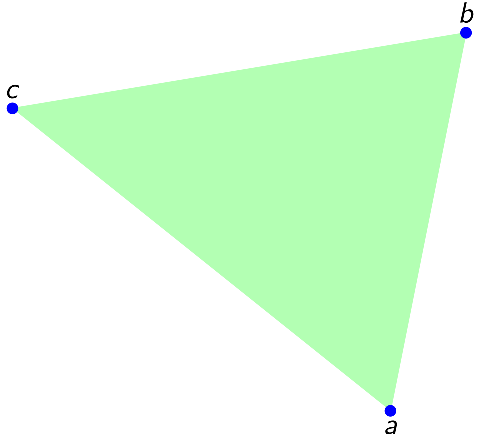
$$p(\lambda) := (1-\lambda)a + \lambda b$$

$$p(\lambda) = a + \lambda(b-a)$$

Combinaciones convexas de tres puntos en el plano (ejercicio)



Combinaciones convexas de tres puntos en el plano (ejercicio)



Los generadores de una envoltura lineal le pertenecen

Proposición

Sean $v_1, \ldots, v_m \in V$ y sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces,

$$v_j \in \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m).$$

Los generadores de una envoltura lineal le pertenecen

Proposición

Sean $v_1, \ldots, v_m \in V$ y sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces,

$$v_j \in \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m).$$

Idea de demostración.

Los generadores de una envoltura lineal le pertenecen

Proposición

Sean $v_1, \ldots, v_m \in V$ y sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces,

$$v_j \in \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m).$$

Idea de demostración.

$$\alpha_k$$

Los generadores de una envoltura lineal le pertenecen

Proposición

Sean $v_1, \ldots, v_m \in V$ y sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces,

$$v_j \in \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m).$$

Idea de demostración.

$$\alpha_k :=$$

Los generadores de una envoltura lineal le pertenecen

Proposición

Sean $v_1, \ldots, v_m \in V$ y sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Entonces,

$$v_j \in \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m).$$

Idea de demostración.

$$\alpha_k := \delta_{j,k}.$$

Combinaciones convexas de combinaciones convexas

Proposición

Sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$,

$$u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p), \quad v \in \operatorname{conv}(b_1, \ldots, b_q), \quad w \in \operatorname{conv}(u, v).$$

Entonces,

$$w \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q).$$

Demostración, inicio

Sean $\xi_1, \ldots, \xi_p \geq 0$, $\eta_1, \ldots, \eta_q \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{q} \eta_k = 1, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = 1,$$

$$u = \sum_{k=1}^{p} \xi_k a_k, \qquad v = \sum_{k=1}^{q} \eta_k b_k, \qquad w = \gamma_1 u + \gamma_2 v.$$

Demostración, inicio

Sean $\xi_1, \ldots, \xi_p \geq 0$, $\eta_1, \ldots, \eta_q \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{q} \eta_k = 1, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = 1,$$

$$u = \sum_{k=1}^{p} \xi_k a_k, \qquad v = \sum_{k=1}^{q} \eta_k b_k, \qquad w = \gamma_1 u + \gamma_2 v.$$

Sustituimos las expresiones para u y v:

$$w$$

Demostración, inicio

Sean $\xi_1, \ldots, \xi_p \geq 0$, $\eta_1, \ldots, \eta_q \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{q} \eta_k = 1, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = 1,$$

$$u = \sum_{k=1}^{p} \xi_k a_k, \qquad v = \sum_{k=1}^{q} \eta_k b_k, \qquad w = \gamma_1 u + \gamma_2 v.$$

Sustituimos las expresiones para u y v:

$$w =$$

Demostración, inicio

Sean $\xi_1, \ldots, \xi_p \geq 0$, $\eta_1, \ldots, \eta_q \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{q} \eta_k = 1, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = 1,$$

$$u = \sum_{k=1}^{p} \xi_k a_k, \qquad v = \sum_{k=1}^{q} \eta_k b_k, \qquad w = \gamma_1 u + \gamma_2 v.$$

Sustituimos las expresiones para u y v:

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$ y

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$ y

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$ y

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j =$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$ y

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_1 \xi_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \gamma_2 \eta_{j-p}$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$ y

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_1 \xi_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \gamma_2 \eta_{j-p} =$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$ y

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_1 \xi_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \gamma_2 \eta_{j-p} = \gamma_1 \sum_{k=1}^{p} \xi_k + \gamma_2 \sum_{k=1}^{q} \eta_k$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$ y

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_1 \xi_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \gamma_2 \eta_{j-p} = \gamma_1 \sum_{k=1}^{p} \xi_k + \gamma_2 \sum_{k=1}^{q} \eta_k =$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$ y

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_1 \xi_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \gamma_2 \eta_{j-p} = \gamma_1 \sum_{k=1}^{p} \xi_k + \gamma_2 \sum_{k=1}^{q} \eta_k = \gamma_1 + \gamma_2$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \leq j \leq p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \leq j \leq p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \leq j \leq p, \\ b_{j-p}, & p+1 \leq j \leq p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \geq 0$ y

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_1 \xi_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \gamma_2 \eta_{j-p} = \gamma_1 \sum_{k=1}^{p} \xi_k + \gamma_2 \sum_{k=1}^{q} \eta_k = \gamma_1 + \gamma_2 =$$

Demostración, continuación

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$, definimos

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

Los coeficientes λ_j satisfacen $\lambda_j \ge 0$ y

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_1 \xi_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \gamma_2 \eta_{j-p} = \gamma_1 \sum_{k=1}^{p} \xi_k + \gamma_2 \sum_{k=1}^{q} \eta_k = \gamma_1 + \gamma_2 = 1.$$

Demostración, final

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \leq j \leq p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \leq j \leq p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \leq j \leq p, \\ b_{j-p}, & p+1 \leq j \leq p+q. \end{cases}$$

Demostración, final

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \leq j \leq p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \leq j \leq p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \leq j \leq p, \\ b_{j-p}, & p+1 \leq j \leq p+q. \end{cases}$$

En esta notación,

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k$$

Demostración, final

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

En esta notación,

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k =$$

Demostración, final

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

En esta notación,

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \lambda_j c_j$$

Demostración, final

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

En esta notación,

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \lambda_j c_j =$$

Demostración, final

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

En esta notación,

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \lambda_j c_j = \sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j c_j.$$

Demostración, final

$$\lambda_j := \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \le j \le p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q; \end{cases} \qquad c_j := \begin{cases} a_j, & 1 \le j \le p, \\ b_{j-p}, & p+1 \le j \le p+q. \end{cases}$$

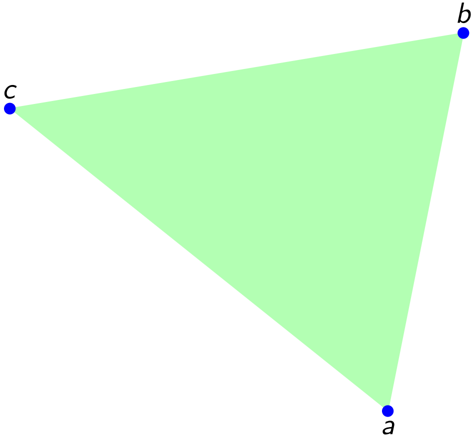
En esta notación,

$$w = \sum_{k=1}^{p} (\gamma_1 \xi_k) a_k + \sum_{k=1}^{q} (\gamma_2 \eta_k) b_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j c_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \lambda_j c_j = \sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j c_j.$$

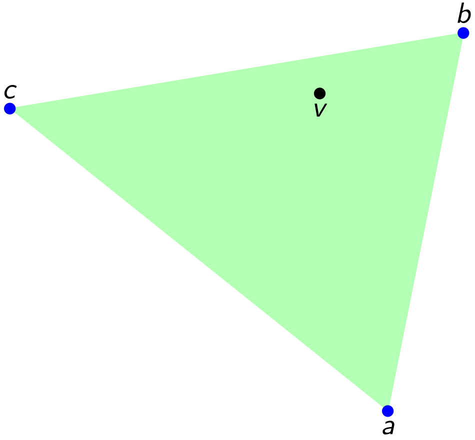
Hemos mostrado que

$$w \in \operatorname{conv}(c_1, \ldots, c_{p+q}) = \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q).$$

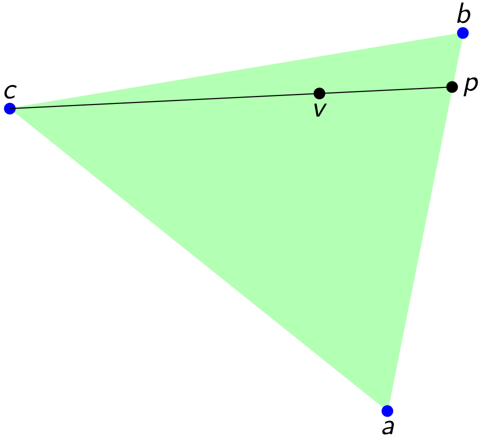
Combinaciones convexas de tres puntos en el plano (idea)



Combinaciones convexas de tres puntos en el plano (idea)



Combinaciones convexas de tres puntos en el plano (idea)



$v \in \mathrm{conv}(p, c)$

$p \in \mathrm{conv}(a, b)$

$v \in \mathrm{conv}(a, b, c)$

Combinaciones convexas de tres vectores en terminos de combinaciones convexas de dos vectores

Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_3 \neq 1.$$

Combinaciones convexas de tres vectores en terminos de combinaciones convexas de dos vectores

Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_3 \neq 1.$$

Factorizamos $1 - \alpha_3$ de los primeros dos sumandos:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

Combinaciones convexas de tres vectores en terminos de combinaciones convexas de dos vectores

Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_3 \neq 1.$$

Factorizamos $1 - \alpha_3$ de los primeros dos sumandos:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 =$$

Combinaciones convexas de tres vectores en terminos de combinaciones convexas de dos vectores

Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_3 \neq 1.$$

Factorizamos $1 - \alpha_3$ de los primeros dos sumandos:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3)\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} v_2\right) + \alpha_3 v_3.$$

Combinaciones convexas de tres vectores en terminos de combinaciones convexas de dos vectores

Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_3 \neq 1.$$

Factorizamos $1 - \alpha_3$ de los primeros dos sumandos:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3)\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} v_2\right) + \alpha_3 v_3.$$

Notamos que

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3}$$

Combinaciones convexas de tres vectores en terminos de combinaciones convexas de dos vectores

Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_3 \neq 1.$$

Factorizamos $1 - \alpha_3$ de los primeros dos sumandos:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3)\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} v_2\right) + \alpha_3 v_3.$$

Notamos que

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} =$$

Combinaciones convexas de tres vectores en terminos de combinaciones convexas de dos vectores

Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_3 \neq 1.$$

Factorizamos $1 - \alpha_3$ de los primeros dos sumandos:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3) \left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} v_2 \right) + \alpha_3 v_3.$$

Notamos que

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

Combinaciones convexas de tres vectores en terminos de combinaciones convexas de dos vectores

Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_3 \neq 1.$$

Factorizamos $1 - \alpha_3$ de los primeros dos sumandos:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3)\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} v_2\right) + \alpha_3 v_3.$$

Notamos que

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} =$$

Combinaciones convexas de tres vectores en terminos de combinaciones convexas de dos vectores

Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \qquad \alpha_3 \neq 1.$$

Factorizamos $1 - \alpha_3$ de los primeros dos sumandos:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1 - \alpha_3)\left(\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} v_1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} v_2\right) + \alpha_3 v_3.$$

Notamos que

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_3} + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_3} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = 1.$$

Ejemplo: una combinación convexa de 4 vectores en términos de una combinación convexa de 3 vectores

$$v = \frac{1}{7}\,a_1 + \frac{2}{7}\,a_2 + \frac{1}{7}\,a_3 + \frac{3}{7}\,a_4.$$

Ejemplo: una combinación convexa de 4 vectores en términos de una combinación convexa de 3 vectores

$$v = \frac{1}{7}\,a_1 + \frac{2}{7}\,a_2 + \frac{1}{7}\,a_3 + \frac{3}{7}\,a_4.$$

Queremos representar v en la siguiente forma:

$$v = ?\left(?\,a_1 + ?\,a_2 + ?\,a_3\right) + \frac{3}{7}\,a_4.$$

Ejemplo: una combinación convexa de 4 vectores en términos de una combinación convexa de 3 vectores

$$v = \frac{1}{7}\,a_1 + \frac{2}{7}\,a_2 + \frac{1}{7}\,a_3 + \frac{3}{7}\,a_4.$$

Queremos representar v en la siguiente forma:

$$v = ?\,\Big(?\,a_1 + ?\,a_2 + ?\,a_3\Big) + \frac{3}{7}\,a_4.$$

En las primeros tres sumandos, factorizamos

Ejemplo: una combinación convexa de 4 vectores en términos de una combinación convexa de 3 vectores

$$v = \frac{1}{7}\,a_1 + \frac{2}{7}\,a_2 + \frac{1}{7}\,a_3 + \frac{3}{7}\,a_4.$$

Queremos representar v en la siguiente forma:

$$v =?\,\Big(?\,a_1 + ?\,a_2 + ?\,a_3\Big) + \frac{3}{7}\,a_4.$$

En las primeros tres sumandos, factorizamos $\frac{4}{7}$:

Ejemplo: una combinación convexa de 4 vectores en términos de una combinación convexa de 3 vectores

$$v = \frac{1}{7}\,a_1 + \frac{2}{7}\,a_2 + \frac{1}{7}\,a_3 + \frac{3}{7}\,a_4.$$

Queremos representar v en la siguiente forma:

$$v = ?\left(?\,a_1 + ?\,a_2 + ?\,a_3\right) + \frac{3}{7}\,a_4.$$

En las primeros tres sumandos, factorizamos $\frac{4}{7}$:

$$v = \frac{4}{7}\left(\frac{1}{4}\,a_1 + \frac{1}{2}\,a_2 + \frac{1}{4}\,a_3\right) + \frac{3}{7}\,a_4.$$

Combinaciones convexas de $m+1$ vectores en términos de combinaciones convexas de m vectores

Proposición

Sean $a_1, \ldots, a_{m+1} \in V$ y sea $v \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_{m+1})$.

Entonces, existe $u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$ tal que $v \in \operatorname{conv}(u, a_{m+1})$.

Demostración, inicio

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k a_k = v.$$

Consideremos dos casos:

1) $\lambda_{m+1} = 1$,
2) $\lambda_{m+1} \neq 1$.

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k =$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0, \qquad v$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0, \qquad v =$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0, \qquad v = a_{m+1}.$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0, \qquad v = a_{m+1}.$$

Pongamos $u := a_1$.

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0, \qquad v = a_{m+1}.$$

Pongamos $u := a_1$.

Obtenemos que

$$v$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0, \qquad v = a_{m+1}.$$

Pongamos $u := a_1$.

Obtenemos que

$$v =$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0, \qquad v = a_{m+1}.$$

Pongamos $u := a_1$.

Obtenemos que

$$v = 0 \cdot u + 1 \cdot a_{m+1}$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0, \qquad v = a_{m+1}.$$

Pongamos $u := a_1$.

Obtenemos que

$$v = 0 \cdot u + 1 \cdot a_{m+1} \in$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} = 1$

En este caso, es fácil calcular la suma de los primeros m coeficientes:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k = 0.$$

Concluimos que

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0, \qquad v = a_{m+1}.$$

Pongamos $u := a_1$.

Obtenemos que

$$v = 0 \cdot u + 1 \cdot a_{m+1} \in \operatorname{conv}(u, a_{m+1}).$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

v

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v =$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1}$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} =$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \le k \le m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k =$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}}$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} =$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \le k \le m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \ge 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k =$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}}\, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \le k \le m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \ge 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1})$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \le k \le m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1}) =$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}}\, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \le k \le m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \ge 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1}) = 1.$$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}}\, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1}) = 1.$$

Luego $\quad u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$,

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1}) = 1.$$

Luego $\quad u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m), \quad v$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}}\, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1}) = 1.$$

Luego $\quad u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m), \quad v =$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1}) = 1.$$

Luego $\quad u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m), \quad v = (1 - \lambda_{m+1}) u + \lambda_{m+1} a_{m+1}$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1}) = 1.$$

Luego $\quad u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m), \quad v = (1 - \lambda_{m+1}) u + \lambda_{m+1} a_{m+1} \in$

Demostración, caso $\lambda_{m+1} \neq 1$

$$v = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \, a_k \right) + \lambda_{m+1} a_{m+1}.$$

Pongamos

$$\xi_k := \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} \quad (1 \leq k \leq m), \qquad u := \sum_{k=1}^{m} \xi_k a_k.$$

Entonces, $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m} \xi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{m+1}} = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k = \frac{1}{1 - \lambda_{m+1}} (1 - \lambda_{m+1}) = 1.$$

Luego $\quad u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m), \quad v = (1 - \lambda_{m+1}) u + \lambda_{m+1} a_{m+1} \in \operatorname{conv}(u, a_{m+1}).$

La envoltura convexa de una lista de vectores no se cambia al cambiar el orden de los vectores

$S_m :=$ las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, m\}$.

La envoltura convexa de una lista de vectores no se cambia al cambiar el orden de los vectores

$S_m :=$ las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, m\}$.

Ejercicio. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $\sigma \in S_m$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(m)}) = \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m).$$

La envoltura convexa de una lista de vectores no se cambia al agregar un vector repetido

Ejercicio. Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m, a_j) = \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m).$$

La envoltura convexa crece en el sentido no estricto, al aumentar la lista de vectores

Sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p) \subseteq \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q).$$

La envoltura convexa de una lista de vectores no se cambia al agregar un vector que pertenece a esta envoltura convexa

Ejercicio.

Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $b \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m, b) = \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m).$$