Combinaciones convexas

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de combinaciones convexas de una lista de vectores.

Prerrequisitos. Espacios vectoriales, combinaciones lineales.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial real o complejo. En el estudio de conjuntos convexos siempre nos restringimos a escalares reales; en otras palabras, tratamos V como un espacio vectorial real.

1 Definición (combinación convexa de una lista de vectores)**.** Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$. Entonces cualquier vector de la forma

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k,$$

donde $\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_m \geq 0$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$, se llama *combinación convexa* de los vectores $v_1, \ldots, v_m$.

2 Definición (la envoltura convexa de una lista de vectores)**.** Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$. Denotamos por $\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m)$ al conjunto de todas las combinaciones convexas de los vectores $v_1, \ldots, v_m$. Formalmente,

$$\operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m) := \left\{ w \in v\colon \quad \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0 \quad \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1 \quad \wedge \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = w \right) \right\}.$$

3 Proposición (combinaciones convexas de dos vectores)**.** *Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, v_2 \in V$. Entonces*

$$\operatorname{conv}(v_1, v_2) = \big\{ w \in V\colon \quad \exists \lambda \in [0,1] \quad w = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \big\}.$$

Idea de demostración. Si $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ y $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, pongamos $\lambda = \alpha_2$. Al revés, si $\lambda \in [0,1]$, pongamos $\alpha_1 = 1 - \lambda$, $\alpha_2 = \lambda$. $\square$

4 Ejercicio (combinaciones convexas de dos números reales)**.** Elegir algunos $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Por ejemplo, pueden servir $x = 3$, $y = 8$. Calcular y dibujar $(1-\lambda)x + \lambda y$ para $\lambda = 0$, $\lambda = 1/5$, $\lambda = 2/5$, $\lambda = 1/2$, $\lambda = 3/5$, $\lambda = 4/5$, $\lambda = 1$.

5 Ejercicio (combinaciones convexas de dos puntos en el plano)**.** Elegir algunos $x, y \in \mathbb{R}^2$ tales que $x \neq y$. Por ejemplo, pueden servir $x = [1, -3]^\top$, $y = [-4, 7]^\top$. Calcular y dibujar $(1-\lambda)x + \lambda y$ para $\lambda = 0$, $\lambda = 1/5$, $\lambda = 2/5$, $\lambda = 1/2$, $\lambda = 3/5$, $\lambda = 4/5$, $\lambda = 1$.

6 Proposición. *Sea V un espacio vectorial real y sean $v_1, \ldots, v_m \in V$. Entonces para cada j en $\{1, \ldots, m\}$*

$$v_j \in \operatorname{conv}(v_1, \ldots, v_m).$$

Demostración. Pongamos $\alpha_k \coloneqq \delta_{j,k}$ para cada k en $\{1, \ldots, m\}$. Entonces $\alpha_k \geq 0$ para cada k,

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = \sum_{k=1}^{m} \delta_{j,k} = \delta_{j,j} = 1,$$

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^{m} \delta_{j,k} v_k = v_j.$$

Hemos mostrado que v_j es una combinación convexa de los vectores $v_1, \ldots, v_m$. $\square$

7 Proposición (combinaciones convexas de combinaciones convexas)**.** *Sea V un espacio vectorial real, sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$, $u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p)$, $v \in \operatorname{conv}(b_1, \ldots, b_q)$, $w \in \operatorname{conv}(u, v)$. Entonces $w \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q)$.*

Demostración. Sean $\xi_1, \ldots, \xi_p \geq 0$, $\eta_1, \ldots, \eta_q \geq 0$, $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{p} \xi_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{q} \eta_k = 1, \qquad \gamma_1 + \gamma_2 = 1,$$

$$u = \sum_{k=1}^{p} \xi_k a_k, \qquad v = \sum_{k=1}^{q} \eta_k b_k, \qquad w = \gamma_1 u + \gamma_2 v.$$

Para cada j en $\{1, \ldots, p+q\}$ definimos

$$\lambda_j \coloneqq \begin{cases} \gamma_1 \xi_j, & 1 \leq j \leq p, \\ \gamma_2 \eta_{j-p}, & p+1 \leq j \leq p+q; \end{cases} \qquad c_j \coloneqq \begin{cases} a_j, & 1 \leq j \leq p, \\ b_{j-p}, & p+1 \leq j \leq p+q. \end{cases}$$

Entonces $\lambda_j \geq 0$ para cada j,

$$\sum_{j=1}^{p+q} \lambda_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_1 \xi_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \gamma_2 \eta_{j-p} = \gamma_1 \sum_{k=1}^{p} \xi_k + \gamma_2 \sum_{k=1}^{q} \eta_k = \gamma_1 + \gamma_2 = 1,$$

y

$$\sum_{j=1}^{p+q}\lambda_j c_j = \sum_{j=1}^{p}\gamma_1\xi_j a_j + \sum_{j=p+1}^{p+q}\gamma_2\eta_{j-p}b_{j-p} = \gamma_1\sum_{k=1}^{p}\xi_k a_k + \gamma_2\sum_{k=1}^{q}\eta_k b_k = \gamma_1 u + \gamma_2 v = w.$$

Hemos mostrado que $w \in \operatorname{conv}(c_1, \ldots, c_{p+q})$, esto es, $w \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q)$. $\square$

8 Ejemplo. Sean $v_1, v_2, v_3 \in V$ y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0$ tales que $\alpha_3 \neq 1$. Entonces

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1-\alpha_3)\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_3}v_1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_3}v_2\right) + \alpha_3 v_3.$$

9 Proposición (combinaciones convexas de $m+1$ vectores en términos de combinaciones convexas de m vectores)**.** *Sea V un espacio vectorial real, sean $a_1, \ldots, a_{m+1} \in V$ y sea $v \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_{m+1})$. Entonces existe $u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$ tal que $v \in \operatorname{conv}(u, a_{m+1})$.*

Demostración. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1} \geq 0$ tales que

$$\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{m+1}\lambda_k a_k = v.$$

Consideremos dos casos: $\lambda_{m+1} = 1$ y $\lambda_{m+1} \neq 1$.

Caso $\lambda_{m+1} = 1$. En este caso, $\sum_{k=1}^{m}\lambda_k = 0$. Como $\lambda_k \geq 0$ para cada k en $\{1, \ldots, m\}$, concluimos que $\lambda_k = 0$ para cada k en $\{1, \ldots, m\}$. Por lo tanto, $v = a_{m+1}$. Pongamos $u = a_1$ y obtenemos $v \in \operatorname{conv}(u, a_{m+1})$.

Caso $\lambda_{m+1} \neq 1$. Para cada k en $\{1, \ldots, m\}$, pongamos

$$\xi_k \coloneqq \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{m+1}}.$$

Entonces $\xi_k \geq 0$ para cada k y

$$\sum_{k=1}^{m}\xi_k = \sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{m+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{m+1}}\sum_{k=1}^{m}\lambda_k = \frac{1}{1-\lambda_{m+1}}\big(1-\lambda_{m+1}\big) = 1.$$

Además, pongamos

$$u \coloneqq \sum_{k=1}^{m}\xi_k a_k.$$

Entonces $u \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$ y

$$(1 - \lambda_{m+1})u + \lambda_{m+1} a_{m+1} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k + \lambda_{m+1} a_{m+1} = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k a_k = v.$$

Hemos mostrado que $v \in \operatorname{conv}(u, a_{m+1})$. $\square$

10 Ejercicio (la envoltura convexa de una lista de vectores no se cambia al cambiar el orden de los vectores)**.** Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea σ una permutación del conjunto $\{1, \ldots, m\}$, esto es, $\sigma \in S_n$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(m)}) = \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m).$$

11 Ejercicio (la envoltura convexa de una lista de vectores no se cambia al agregar un vector repetido)**.** Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $j \in \{1, \ldots, m\}$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m, a_j) = \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m).$$

12 Ejercicio (la envoltura convexa crece en el sentido no estricto, al aumentar la lista de vectores)**.** Sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p) \subseteq \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q).$$

13 Ejercicio (la envoltura convexa de una lista de vectores no se cambia al agregar un vector que está en la envoltura convexa)**.** Sean $a_1, \ldots, a_m \in V$ y sea $b \in \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m)$. Demostrar que

$$\operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m, b) = \operatorname{conv}(a_1, \ldots, a_m).$$