Convergencia de series de vectores ortogonales en los espacios de Hilbert

Objetivos. Establecer el siguiente criterio de convergencia de series de vectores ortogonales en espacios de Hilbert: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge si, y sólo si, $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|^2 < +\infty$.

Prerrequisitos. La identidad de Pitágoras en los espacios con producto interno, la definición de la convergencia de series, la continuidad de la norma.

1 Proposición (la identidad de Pitágoras en el espacio con producto interno, repaso)**.** *Sea H un espacio con producto interno y sean $a, b \in H$ tales que $a \perp b$. Entonces*

$$\|a + b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

2 Proposición (la identidad de Pitágoras para una suma finita de vectores ortogonales, repaso)**.** *Sea H un espacio con producto interno, sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $(a_1, \ldots, a_m)$ una lista ortogonal de vectores en H. Entonces*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|a_k\|^2.$$

Demostración. La inducción matemática sobre m. En el paso de inducción se usa el hecho que $a_m \perp (a_1 + \ldots + a_{m-1})$ y la Proposición 1. □

3 Proposición (la identidad de Pitágoras para una serie de vectores ortogonales)**.** *Sea H un espacio con producto interno y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en H. Supongamos que la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ converge en H a un vector v. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|^2 = \|v\|^2. \tag{1}$$

En particular, la serie numérica en el lado izquierdo de (1) converge.

Demostración. Para cada m en $\mathbb{N}$, denotemos la suma $\sum_{k=1}^{m} a_k$ por b_m. Por la Proposición 2,

$$\|b_m\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|a_k\|^2.$$

Pasamos al límite, cuando $m \to \infty$. Como $b_m \to v$, la continuidad de la norma implica que $\|b_m\| \to \|v\|$. La función $t \mapsto t^2$ es continua, por eso

$$\lim_{k\to\infty} \|b_m\|^2 = \|v\|^2.$$

Luego, por la definición de la suma de la serie,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|^2 = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|a_k\|^2 = \lim_{m\to\infty} \|b_m\|^2 = \|v\|^2. \qquad \square$$

4 Teorema (criterio de la convergencia de una serie ortogonal en un espacio de Hilbert)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge en H;

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|^2 < +\infty$.

Demostración. En la Proposición 3 ya probamos que (a) implica (b).

Supongamos (b) y demostremos (a). Denotemos por b_m y q_m las sumas parciales de nuestras series:

$$b_m := \sum_{k=1}^{m} a_k, \qquad q_m := \sum_{k=1}^{m} \|a_k\|^2.$$

La condición (b) implica que la sucesión $(q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \ge p$ se cumple $|q_n - q_m| < \varepsilon^2$.

Sean $m, n \ge p$. Consideremos el caso $m < n$ (el caso $m > n$ es similar).

$$b_n - b_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Todos los sumandos en el lado derecho son ortogonales a pares. Por la identidad de Pitágoras,

$$\|b_n - b_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\|^2 = q_n - q_m < \varepsilon^2.$$

Luego $\|b_n - b_m\| < \varepsilon$. Hemos demostrado que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como el espacio H es completo, existe un límite v de esta sucesión. Este límite, por la definición de la convergencia de las series, es la suma de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. $\square$

5 Observación. En los espacios de Banach tenemos una condición *suficiente* para la convergencia de las series (M-prueba de Weierstrass):

$$\text{si } \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\| < +\infty, \qquad \text{entonces la serie } \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge.}$$

Para las series ortogonales en los espacios de Hilbert, el Teorema 4 nos da una condición *necesaria y suficiente.*

6 Ejemplo. En el espacio ℓ^2 consideremos la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, donde $a_k = \frac{1}{k} e_k$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_2 = +\infty, \qquad \text{pero} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k\|_2^2 < +\infty,$$

y la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.