Convergencia de series de vectores ortogonales

Objetivos. Establecer el siguiente criterio de convergencia de series de vectores ortogonales en espacios de Hilbert: $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ converge si, y sólo si, $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|^2 < +\infty$.

Prerrequisitos. Identidad de Pitágoras en espacios con producto interno, definición de la convergencia de series, desigualdad de Schwarz.

1 Proposición (la identidad de Pitágoras en espacios con producto interno, repaso)**.** *Sean a, b vectores ortogonales en un espacio con producto interno H. Entonces*

$$\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2.$$

2 Proposición (la identidad de Pitágoras para una suma finita de vectores ortogonales, repaso)**.** *Sea $a_1, \ldots, a_m$ una lista ortogonal de vectores en un espacio con producto interno H. Entonces*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{m} \|a_k\|^2.$$

Demostración. Inducción matemática sobre m. En el paso de inducción se usa la Proposición 1. □

3 Proposición (la identidad de Pitágoras para una serie de vectores ortogonales)**.** *Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión ortogonal en un espacio de Hilbert H. Supongamos que la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ converge en H a un vector v. Entonces*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|^2 = \|v\|^2. \tag{1}$$

En particular, la serie numérica en el lado izquierdo de (1) converge.

Demostración. Para cada m en $\mathbb{N}$, denotemos la suma $\sum_{k\le m} a_k$ por b_m. De la ortogonalidad de la sucesión original se sigue que si $n > m$, entonces $b_n - b_m \perp b_m$. Usamos este hecho y la desigualdad de Schwarz:

$$|\langle v - b_m, b_m\rangle|^2 = |\langle v - b_n, b_m\rangle + \langle b_n - b_m, b_m\rangle|^2 = |\langle v - b_n, b_m\rangle| \le \|v - b_n\| \, \|b_m\|.$$

Fijando m y pasando al límite cuando n tiende a infinito, obtenemos que $v - b_m \perp b_m$. Por el teorema de Pitágoras para sumas finitas de vectores ortogonales,

$$\|v\|^2 = \|v - b_m\|^2 + \|b_m\|^2 = \|v - b_m\|^2 + \sum_{k\le m} \|a_k\|^2.$$

Pasando al límite cuando m tiende a infinito, obtenemos (1). □

4 Proposición (criterio de la convergencia de una sucesión ortogonal en un espacio de Hilbert)**.** *Sea* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión ortogonal en un espacio de Hilbert* H*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ *converge en* H*;*

(b) $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|a_k\|^2 < +\infty$*.*

Demostración. Por la Proposición 3, (a) implica (b). Supongamos (b) y demostremos (a). Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k\geq p} \|a_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Para cada n en $\mathbb{N}$ definimos b_n como $\sum_{k\leq n} a_k$. Sean $m, n \in \mathbb{N}$, $p \leq m < n$. Entonces

$$b_n - b_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k.$$

Por la identidad de Pitágoras,

$$\|b_n - b_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^{n} \|a_k\|^2 \leq \sum_{k\geq p} \|a_k\|^2 < \varepsilon^2,$$

y $\|b_n - b_m\| < \varepsilon$. Hemos demostrado que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. □