Convergencia en medida
(un tema de análisis real)

Egor Maximenko

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

29 de mayo de 2024

Objetivos.

Introducir el concepto de convergencia en medida.

Demostrar el teorema: si una sucesión de funciones converge en medida, entonces contiene una subsucesión que converge casi uniformemente.

Objetivos.

Introducir el concepto de convergencia en medida.

Demostrar el teorema: si una sucesión de funciones converge en medida, entonces contiene una subsucesión que converge casi uniformemente.

Prerrequsitos:

- conjuntos auxiliares $A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$, D,
- criterios de convergencia c.t.p. y casi uniforme en términos de estos conjuntos,
- propiedad decreciente de $B(\varepsilon, k)$ respecto a ambas variables,
- propiedad σ-subaditiva de medida,
- subsucesión de una sucesión.

Plan

Varios modos de convergencia

$$
\begin{tikzcd}
f_n \overset{X}{\rightrightarrows} g \arrow[rr] \arrow[d] & & f_n \xrightarrow{X} g \arrow[d] \\
f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \arrow[rr] \arrow[dr] & & f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \arrow[ll, dashed, bend right, "\mu(X)<+\infty"'] \\
& \boxed{f_n \xrightarrow{\mu} g} \arrow[ul, dashed, bend left, "\text{subsucesión}"] &
\end{tikzcd}
$$

Datos iniciales

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

Datos iniciales

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son $\mathcal{F}$-medibles.

Datos iniciales

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de todas las funciones $X \to \mathbb{C}$ que son $\mathcal{F}$-medibles.

Sean $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Convergencia en medida

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada n en $\mathbb{N}$ pongamos

$$A(\varepsilon, n) := \Big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\Big\}.$$

Convergencia en medida

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada n en $\mathbb{N}$ pongamos

$$A(\varepsilon, n) := \Big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\Big\}.$$

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0.$$

Convergencia en medida

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada n en $\mathbb{N}$ pongamos

$$A(\varepsilon, n) := \Big\{x \in X : \ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\Big\}.$$

Se dice que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g en medida μ si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

Verifiquemos que $A(\varepsilon, n)$ es medible

Estamos suponiendo que f_n y g son $\mathcal{F}$-medibles.

Por eso las funciones $h_n := |f_n - g|$ también son $\mathcal{F}$-medibles.

Verifiquemos que $A(\varepsilon, n)$ es medible

Estamos suponiendo que f_n y g son $\mathcal{F}$-medibles.

Por eso las funciones $h_n := |f_n - g|$ también son $\mathcal{F}$-medibles.

$$A(\varepsilon, n) = \Big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\Big\} = h^{-1}\Big[\,[\varepsilon, +\infty[\,\Big].$$

Verifiquemos que $A(\varepsilon, n)$ es medible

Estamos suponiendo que f_n y g son $\mathcal{F}$-medibles.

Por eso las funciones $h_n := |f_n - g|$ también son $\mathcal{F}$-medibles.

$$A(\varepsilon, n) = \Big\{x \in X\colon\ |f_n(x) - g(x)| \ge \varepsilon\Big\} = h^{-1}\Big[\,[\varepsilon, +\infty[\,\Big].$$

El intervalo $[\varepsilon, +\infty[$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, por eso es Borel-medible, y

$$A(\varepsilon, n) \in \mathcal{F}.$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repaso)

$$A(\varepsilon, n) := \Big\{ x \in X\colon \ |f_n(x) - g(x)| \ge \varepsilon \Big\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \ge k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

$$D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon).$$

Monotonía de los conjuntos auxiliares (repaso)

Proposición (para ε fijo, $B(\varepsilon, k)$ decrece respecto a k)

Si $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B(\varepsilon, k+1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Monotonía de los conjuntos auxiliares (repaso)

Proposición (para ε fijo, $B(\varepsilon, k)$ decrece respecto a k)

Si $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B(\varepsilon, k+1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Proposición ($A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$ decrecen respecto a ε)

Si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $n, k \in \mathbb{N}$, entonces

$$A(\varepsilon_2, n) \subseteq A(\varepsilon_1, n), \qquad B(\varepsilon_2, k) \subseteq B(\varepsilon_1, k), \qquad C(\varepsilon_2) \subseteq C(\varepsilon_1).$$

Monotonía de los conjuntos auxiliares (repaso)

Proposición (para ε fijo, $B(\varepsilon, k)$ decrece respecto a k)

Si $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B(\varepsilon, k+1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Proposición ($A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$ decrecen respecto a ε)

Si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $n, k \in \mathbb{N}$, entonces

$$A(\varepsilon_2, n) \subseteq A(\varepsilon_1, n), \qquad B(\varepsilon_2, k) \subseteq B(\varepsilon_1, k), \qquad C(\varepsilon_2) \subseteq C(\varepsilon_1).$$

Proposición (D se escribe como una unión numerable)

$$D = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C(1/m).$$

Convergencia casi en todas partes (repaso)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu\Big(\big\{x \in X\colon\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x)\big\}\Big) = 0.$$

Convergencia casi en todas partes (repaso)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu\Big(\big\{x \in X\colon\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x)\big\}\Big) = 0.$$

Proposición (D es el conjunto de no convergencia)

$$\Big\{x \in X\colon\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x)\Big\} = D.$$

Convergencia casi en todas partes (repaso)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu\Big(\big\{x \in X\colon\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x)\big\}\Big) = 0.$$

Proposición (D es el conjunto de no convergencia)

$$\Big\{x \in X\colon\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} g(x)\Big\} = D.$$

Proposición

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mu(D) = 0.$$

Convergencia casi uniforme (repaso)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \Big(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \xrightarrow{X \setminus E} g \Big).$$

Convergencia casi uniforme (repaso)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \Big(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \overset{X \setminus E}{\rightrightarrows} g \Big).$$

Teorema (criterio de la convergencia μ-c.u. en términos de $B(\varepsilon, k)$)

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k \to \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Relación de la convergencia c.u. con la convergencia c.t.p. (repaso)

Proposición

Si $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Relación de la convergencia c.u. con la convergencia c.t.p. (repaso)

Proposición

Si $f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\Longrightarrow} g$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Proposición (teorema de Egorov)

Si $\mu(X) < +\infty$ y $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$, entonces $f_n \overset{\mu\text{-c.u.}}{\Longrightarrow} g$.

Comparación de los conjuntos $A(\varepsilon, k)$ y $B(\varepsilon, k)$

Lema

Sean $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Demostración del lema

$B(\varepsilon, k)$

Demostración del lema

$$B(\varepsilon, k) =$$

Demostración del lema

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n)$$

Demostración del lema

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) =$$

Demostración del lema

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A(\varepsilon, n) \right)$$

Demostración del lema

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A(\varepsilon, n) \right) =$$

Demostración del lema

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A(\varepsilon, n) \right) = A(\varepsilon, k) \cup B(\varepsilon, k+1).$$

Demostración del lema

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A(\varepsilon, n) \right) = A(\varepsilon, k) \cup B(\varepsilon, k+1).$$

Por lo tanto,

$$A(\varepsilon, k)$$

Demostración del lema

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A(\varepsilon, n) \right) = A(\varepsilon, k) \cup B(\varepsilon, k+1).$$

Por lo tanto,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq$$

Demostración del lema

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A(\varepsilon, n) \right) = A(\varepsilon, k) \cup B(\varepsilon, k+1).$$

Por lo tanto,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

La convergencia casi uniforme implica la convergencia en medida

Proposición

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces, $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$ y k en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, k)$$

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$ y k en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq$$

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$ y k en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, k),$$

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$ y k en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, k), \qquad 0 \leq \mu(A(\varepsilon, k)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$ y k en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, k), \qquad 0 \leq \mu(A(\varepsilon, k)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Por la suposición,

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$ y k en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, k), \qquad 0 \leq \mu(A(\varepsilon, k)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Por la suposición,

$$\lim_{k \to \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$ y k en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, k), \qquad 0 \leq \mu(A(\varepsilon, k)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Por la suposición,

$$\lim_{k \to \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Luego

Demostración

Para cada $\varepsilon > 0$ y k en $\mathbb{N}$,

$$A(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, k), \qquad 0 \leq \mu(A(\varepsilon, k)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Por la suposición,

$$\lim_{k \to \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Luego

$$\lim_{k \to \infty} \mu(A(\varepsilon, k)) = 0.$$

Si $\mu(X) < +\infty$, la convergencia c.t.p. implica la convergencia en medida

Corolario

Supongamos que $\mu(X) < +\infty$ y $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$. Entonces, $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

El concepto de una subsucesión (repaso)

Suponemos que $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números y $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una subsucesión estrictamente creciente.

El concepto de una subsucesión (repaso)

Suponemos que $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números y $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una subsucesión estrictamente creciente. Entonces, la composición $\alpha \circ \nu = (\alpha_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que se conoce como subsucesión de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

El concepto de una subsucesión (repaso)

Suponemos que $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números y $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una subsucesión estrictamente creciente. Entonces, la composición $\alpha \circ \nu = (\alpha_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que se conoce como subsucesión de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplo. Sea $\nu(p) := p^2$. Pongamos $\beta_p := \alpha_{\nu(p)}$.

$$\underbrace{\alpha_1}_{\beta_1},\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \underbrace{\alpha_4}_{\beta_2},\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_7,\ \alpha_8,\ \underbrace{\alpha_9}_{\beta_3},\ \ldots$$

Los elementos $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_9, \ldots$ forman una subsucesión de la sucesión original.

Teorema

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu} g$.
Entonces, existe $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $f_{\nu(p)} \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Teorema

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu} g$.
Entonces, existe $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $f_{\nu(p)} \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

En otras palabras, el teorema dice que existe una subsucesión de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge μ-casi uniformemente a g.

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) \to 0.$

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) \to 0.$

Por lo tanto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un $K(\varepsilon, \delta)$ tal que

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) \to 0.$

Por lo tanto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un $K(\varepsilon, \delta)$ tal que

$$\forall n \geq K(\varepsilon, \delta)$$

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) \to 0.$

Por lo tanto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un $K(\varepsilon, \delta)$ tal que

$$\forall n \geq K(\varepsilon, \delta) \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) < \delta.$$

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) \to 0.$

Por lo tanto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un $K(\varepsilon, \delta)$ tal que

$$\forall n \geq K(\varepsilon, \delta) \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) < \delta.$$

Definimos una sucesión de índices $\nu = (\nu(p))_{p \in \mathbb{N}}$ mediante las reglas:

$$\nu_1 := K\left(\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}\right),$$

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) \to 0.$

Por lo tanto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un $K(\varepsilon, \delta)$ tal que

$$\forall n \geq K(\varepsilon, \delta) \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) < \delta.$$

Definimos una sucesión de índices $\nu = (\nu(p))_{p \in \mathbb{N}}$ mediante las reglas:

$$\nu_1 := K\left(\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}\right), \qquad \nu_p := \max\left\{K\left(\frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}\right), \nu_{p-1} + 1\right\}.$$

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(A(\varepsilon, n)) \to 0.$

Por lo tanto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un $K(\varepsilon, \delta)$ tal que

$$\forall n \geq K(\varepsilon, \delta) \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) < \delta.$$

Definimos una sucesión de índices $\nu = (\nu(p))_{p \in \mathbb{N}}$ mediante las reglas:

$$\nu_1 := K\left(\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}\right), \qquad \nu_p := \max\left\{K\left(\frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}\right), \nu_{p-1} + 1\right\}.$$

Es fácil ver que $\quad \nu_p > \nu_{p-1} \quad$ y

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que $\qquad \forall \varepsilon > 0 \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) \to 0.$

Por lo tanto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un $K(\varepsilon, \delta)$ tal que

$$\forall n \geq K(\varepsilon, \delta) \qquad \mu(A(\varepsilon, n)) < \delta.$$

Definimos una sucesión de índices $\nu = (\nu(p))_{p \in \mathbb{N}}$ mediante las reglas:

$$\nu_1 := K\left(\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1}\right), \qquad \nu_p := \max\left\{K\left(\frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}\right), \nu_{p-1} + 1\right\}.$$

Es fácil ver que $\quad \nu_p > \nu_{p-1} \quad$ y $\quad \mu(A(2^{-p}, \nu(p))) < 2^{-p}.$

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p)$$

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) :=$$

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)),$$

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)), \qquad \widetilde{B}(\varepsilon, q)$$

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)), \qquad \widetilde{B}(\varepsilon, q) :=$$

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $\left(f_{\nu(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)), \qquad \widetilde{B}(\varepsilon, q) := \bigcup_{p=q}^{\infty} \widetilde{A}(\varepsilon, p)$$

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $\left(f_{\nu(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)), \qquad \widetilde{B}(\varepsilon, q) := \bigcup_{p=q}^{\infty} \widetilde{A}(\varepsilon, p) =$$

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)), \qquad \widetilde{B}(\varepsilon, q) := \bigcup_{p=q}^{\infty} \widetilde{A}(\varepsilon, p) = \bigcup_{p=q}^{\infty} A(\varepsilon, \nu(p)).$$

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)), \qquad \widetilde{B}(\varepsilon, q) := \bigcup_{p=q}^{\infty} \widetilde{A}(\varepsilon, p) = \bigcup_{p=q}^{\infty} A(\varepsilon, \nu(p)).$$

El conjunto $\widetilde{B}(\varepsilon, q)$ puede ser más pequeño que $B(\varepsilon, \nu(q))$.

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)), \qquad \widetilde{B}(\varepsilon, q) := \bigcup_{p=q}^{\infty} \widetilde{A}(\varepsilon, p) = \bigcup_{p=q}^{\infty} A(\varepsilon, \nu(p)).$$

El conjunto $\widetilde{B}(\varepsilon, q)$ puede ser más pequeño que $B(\varepsilon, \nu(q))$.

Por ejemplo, si $\nu(p) = p^2$, entonces

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los "conjuntos de no cercanía" asociados a $(f_{\nu(p)})_{p\in\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)), \qquad \widetilde{B}(\varepsilon, q) := \bigcup_{p=q}^{\infty} \widetilde{A}(\varepsilon, p) = \bigcup_{p=q}^{\infty} A(\varepsilon, \nu(p)).$$

El conjunto $\widetilde{B}(\varepsilon, q)$ puede ser más pequeño que $B(\varepsilon, \nu(q))$.

Por ejemplo, si $\nu(p) = p^2$, entonces

$$\widetilde{B}(\varepsilon, 3) = \widetilde{A}(\varepsilon, 3) \cup \widetilde{A}(\varepsilon, 4) \cup \widetilde{A}(\varepsilon, 5) \cup \cdots = A(\varepsilon, 9) \cup A(\varepsilon, 16) \cup A(\varepsilon, 25) \cup \ldots .$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon$,

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta.$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta$.

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q)$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $2^{-s} < \varepsilon$, $\sum_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta$.

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta.$

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s)$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta$.

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta.$

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s)$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta$.

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s) =$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta.$

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s) = \bigcup_{p=s}^{\infty} \widetilde{A}(2^{-s}, p)$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim_{q \to \infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta.$

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s) = \bigcup_{p=s}^{\infty} \widetilde{A}(2^{-s}, p) =$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta$.

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s) = \bigcup_{p=s}^{\infty} \widetilde{A}(2^{-s}, p) = \bigcup_{p=s}^{\infty} A(2^{-s}, \nu(p)),$$

$$\mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q))$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta.$

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s) = \bigcup_{p=s}^{\infty} \widetilde{A}(2^{-s}, p) = \bigcup_{p=s}^{\infty} A(2^{-s}, \nu(p)),$$

$$\mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) \leq$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta.$

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s) = \bigcup_{p=s}^{\infty} \widetilde{A}(2^{-s}, p) = \bigcup_{p=s}^{\infty} A(2^{-s}, \nu(p)),$$

$$\mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) \leq \sum_{p=s}^{\infty} \mu(A(2^{-p}, \nu(p)))$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta$.

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s) = \bigcup_{p=s}^{\infty} \widetilde{A}(2^{-s}, p) = \bigcup_{p=s}^{\infty} A(2^{-s}, \nu(p)),$$

$$\mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) \leq \sum_{p=s}^{\infty} \mu(A(2^{-p}, \nu(p))) \leq$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta.$

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s) = \bigcup_{p=s}^{\infty} \widetilde{A}(2^{-s}, p) = \bigcup_{p=s}^{\infty} A(2^{-s}, \nu(p)),$$

$$\mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) \leq \sum_{p=s}^{\infty} \mu(A(2^{-p}, \nu(p))) \leq \sum_{p=s}^{\infty} \frac{1}{2^p} < \delta.$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en $\mathbb{N}$ tal que $\quad 2^{-s} < \varepsilon, \quad \sum\limits_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta.$

Para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\widetilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \widetilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \widetilde{B}(2^{-s}, s) = \bigcup_{p=s}^{\infty} \widetilde{A}(2^{-s}, p) = \bigcup_{p=s}^{\infty} A(2^{-s}, \nu(p)),$$

$$\mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) \leq \sum_{p=s}^{\infty} \mu(A(2^{-p}, \nu(p))) \leq \sum_{p=s}^{\infty} \frac{1}{2^p} < \delta.$$

Hemos demostrado que $\lim\limits_{q\to\infty} \mu(\widetilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

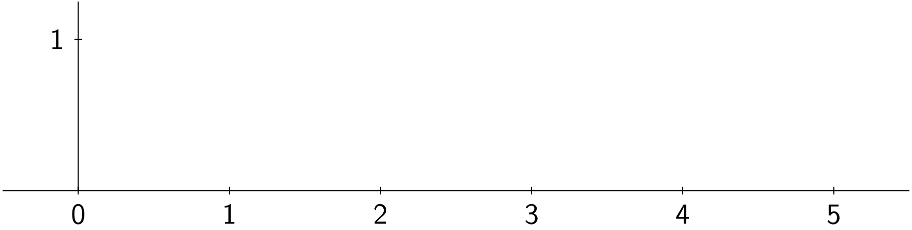
Corolario

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

Entonces, existe $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

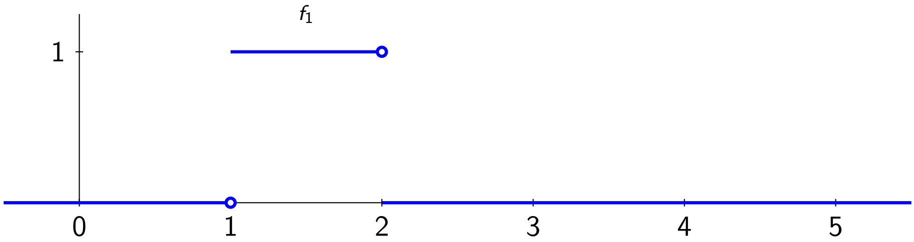
Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1[}$, $g = 0$.



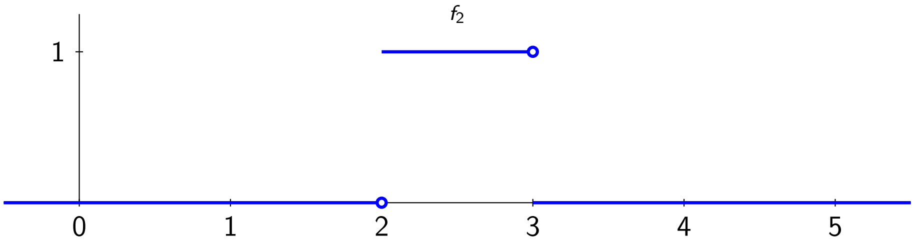
Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1[}$, $g = 0$.



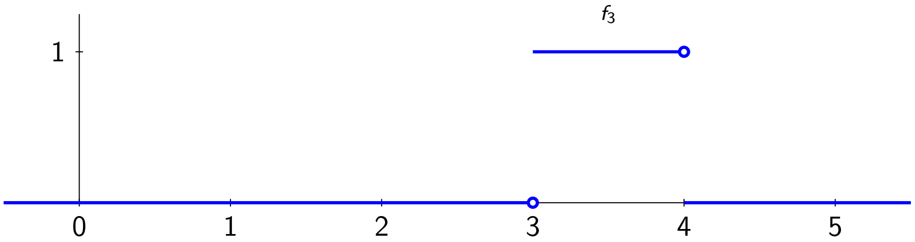
Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1[}$, $g = 0$.



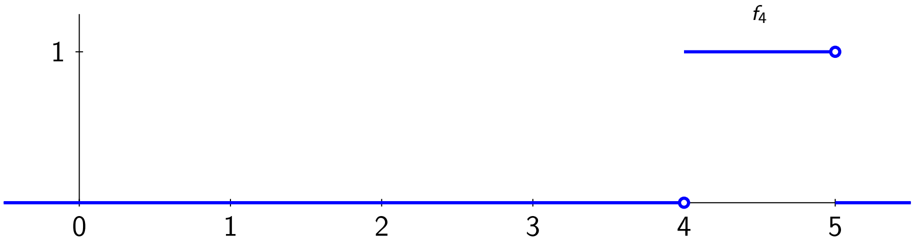
Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1[}$, $g = 0$.

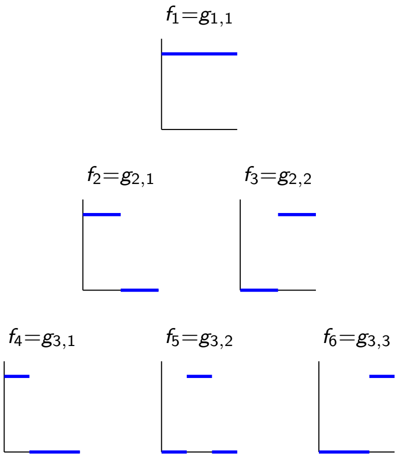


Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n,n+1[}$, $g = 0$.

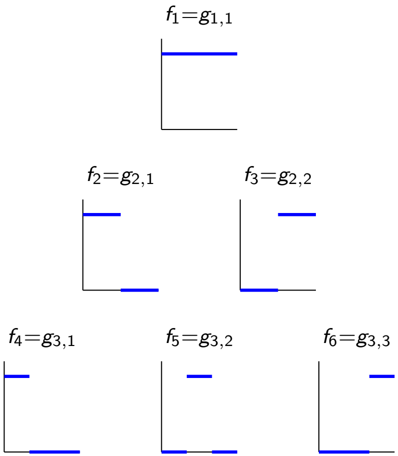


Tarea adicional: ejemplo de convergencia en medida, pero no c.t.p.



$X = [0, 1)$, μ de Lebesgue,
f_n son funciones indicadoras
de ciertos conjuntos,
$g = 0$.

Tarea adicional: ejemplo de convergencia en medida, pero no c.t.p.



$X = [0, 1)$, μ de Lebesgue,
f_n son funciones indicadoras de ciertos conjuntos,
$g = 0$.

Tarea: formalizar el ejemplo.
Escribir f_n como $g_{p,q}$,
expresar n en términos de p, q,
demostrar bien que $\forall x \in [0, 1)$ la sucesión $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge
y que $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

Tarea adicional: un ejemplo relacionado con números racionales

$X = [0,1]$, μ la medida de Lebesgue.

Numeramos los números racionales de $[0,1]$ como una sucesión $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Por ejemplo, se puede usar la sucesión de Farey:

$$r_1 = \frac{0}{1}, \quad r_2 = \frac{1}{1}, \quad r_3 = \frac{1}{2}, \quad r_4 = \frac{1}{3}, \quad r_5 = \frac{2}{3}, \quad r_6 = \frac{1}{4}, \quad r_7 = \frac{3}{4}, \quad \ldots.$$

Escribimos r_n como p_n/q_n, donde p_n y q_n son primos relativos. Pongamos

$$f_n(x) := \exp\left(-(p_n - xq_n)^2\right).$$

Demostrar que $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, pero para cada x en $[0,1]$ la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Construir una subsucesión que converja a 0 casi en todas partes.

Conclusiones