

Convergencia en medida (un tema del curso “Análisis real”)

Egor Maximenko

<http://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

25 de mayo de 2021

Objetivos.

Introducir el concepto de **convergencia en medida**.

Demostrar el teorema: si una sucesión de funciones converge en medida, entonces contiene una subsucesión que converge casi uniformemente.

Objetivos.

Introducir el concepto de **convergencia en medida**.

Demostrar el teorema: si una sucesión de funciones converge en medida, entonces contiene una subsucesión que converge casi uniformemente.

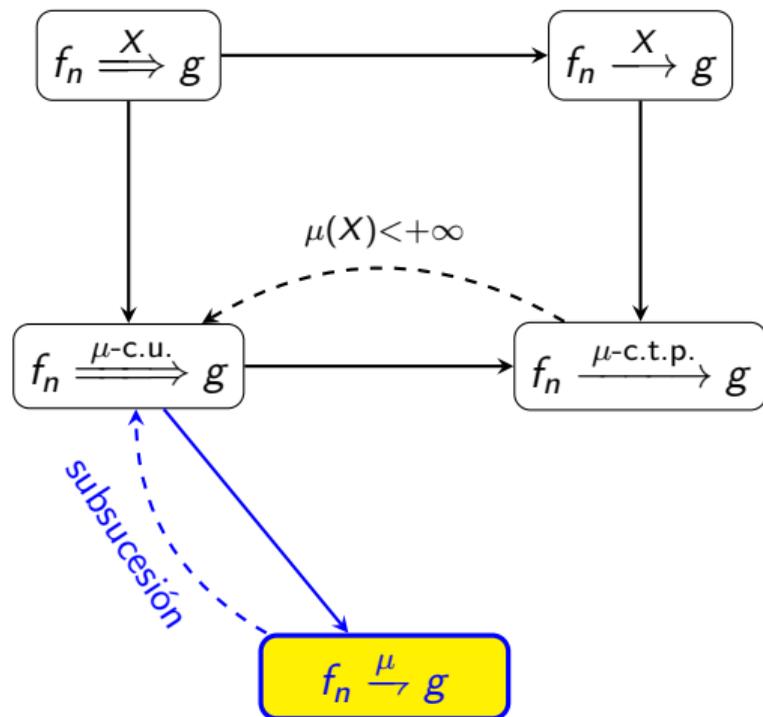
Prerrequisitos:

- conjuntos auxiliares $A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$, D ,
- criterios de convergencia c.t.p. y casi uniforme en términos de estos conjuntos,
- propiedad decreciente de $B(\varepsilon, k)$ respecto a ambas variables,
- propiedad σ -subaditiva de medida,
- subsucesión de una sucesión.

Plan

- 1 Definiciones y herramientas
- 2 Existencia de una subsucesión que converge casi uniformemente
- 3 Consecuencias y contraejemplos

Varios modos de convergencia



Convergencia en medida

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de todas las funciones $X \rightarrow \mathbb{C}$ que son \mathcal{F} -medibles.

Convergencia en medida

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de todas las funciones $X \rightarrow \mathbb{C}$ que son \mathcal{F} -medibles.

Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada n en \mathbb{N} pongamos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Convergencia en medida

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) :=$ el conjunto de todas las funciones $X \rightarrow \mathbb{C}$ que son \mathcal{F} -medibles.

Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada n en \mathbb{N} pongamos

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}.$$

Se dice que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a g en medida μ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A(\varepsilon, n)) = 0.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

Verifiquemos que $A(\varepsilon, n)$ es medible

Estamos suponiendo que las funciones f_n y g son \mathcal{F} -medibles.

Por eso las funciones $h_n := |f_n - g|$ también son \mathcal{F} -medibles.

Verifiquemos que $A(\varepsilon, n)$ es medible

Estamos suponiendo que las funciones f_n y g son \mathcal{F} -medibles.

Por eso las funciones $h_n := |f_n - g|$ también son \mathcal{F} -medibles.

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = h^{-1}[[\varepsilon, +\infty[).$$

Verifiquemos que $A(\varepsilon, n)$ es medible

Estamos suponiendo que las funciones f_n y g son \mathcal{F} -medibles.

Por eso las funciones $h_n := |f_n - g|$ también son \mathcal{F} -medibles.

$$A(\varepsilon, n) = \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = h^{-1}[[\varepsilon, +\infty[).$$

El intervalo $[\varepsilon, +\infty[$ es un subconjunto cerrado, por eso es Borel-medible, y

$$A(\varepsilon, n) \in \mathcal{F}.$$

Definición de los conjuntos auxiliares (repetición)

$$A(\varepsilon, n) := \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n \geq k} A(\varepsilon, n),$$

$$C(\varepsilon) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B(\varepsilon, k),$$

$$D := \bigcup_{\varepsilon > 0} C(\varepsilon).$$

Monotonía de los conjuntos auxiliares (repaso)

Proposición (para ε fijo, $B(\varepsilon, k)$ decrece respecto a k)

Si $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B(\varepsilon, k + 1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Monotonía de los conjuntos auxiliares (repaso)

Proposición (para ε fijo, $B(\varepsilon, k)$ decrece respecto a k)

Si $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B(\varepsilon, k + 1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Proposición ($A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$ decrecen respecto a ε)

Si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $n, k \in \mathbb{N}$, entonces

$$A(\varepsilon_2, n) \subseteq A(\varepsilon_1, n), \quad B(\varepsilon_2, k) \subseteq B(\varepsilon_1, k), \quad C(\varepsilon_2) \subseteq C(\varepsilon_1).$$

Monotonía de los conjuntos auxiliares (repass)

Proposición (para ε fijo, $B(\varepsilon, k)$ decrece respecto a k)

Si $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$B(\varepsilon, k + 1) \subseteq B(\varepsilon, k).$$

Proposición ($A(\varepsilon, n)$, $B(\varepsilon, k)$, $C(\varepsilon)$ decrecen respecto a ε)

Si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, $n, k \in \mathbb{N}$, entonces

$$A(\varepsilon_2, n) \subseteq A(\varepsilon_1, n), \quad B(\varepsilon_2, k) \subseteq B(\varepsilon_1, k), \quad C(\varepsilon_2) \subseteq C(\varepsilon_1).$$

Proposición (D se escribe como una unión numerable)

$$D = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} C(1/m).$$

Convergencia casi en todas partes (repass)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \quad \iff \quad \mu(\{x \in X : f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x)\}) = 0.$$

Convergencia casi en todas partes (repass)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \quad \iff \quad \mu(\{x \in X : f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x)\}) = 0.$$

Proposición (D es el conjunto de no convergencia)

$$\{x \in X : f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x)\} = D.$$

Convergencia casi en todas partes (repass)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \quad \iff \quad \mu(\{x \in X : f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x)\}) = 0.$$

Proposición (D es el conjunto de no convergencia)

$$\{x \in X : f_n(x) \not\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g(x)\} = D.$$

Proposición

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g \quad \iff \quad \mu(D) = 0.$$

Convergencia casi uniforme (repass)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \iff \forall \eta > 0 \exists E \in \mathcal{F} \left(\mu(E) < \eta \wedge f_n \xrightarrow{X \setminus E} g \right).$$

Convergencia casi uniforme (repass)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \iff \text{def} \iff \forall \eta > 0 \exists E \in \mathcal{F} \left(\mu(E) < \eta \wedge f_n \xrightarrow{X \setminus E} g \right).$$

Esta convergencia también se conoce como la convergencia de Egorov.

Convergencia casi uniforme (repass)

Definición:

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \quad \stackrel{\text{def}}{\iff} \quad \forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) < \eta \quad \wedge \quad f_n \xrightarrow{X \setminus E} g \right).$$

Esta convergencia también se conoce como la convergencia de Egorov.

Teorema (criterio de la convergencia μ -c.u. en términos de $B(\varepsilon, k)$)

$$f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0.$$

Relación de la convergencia c.u. con la convergencia c.t.p. (repass)

Proposición

Si $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Relación de la convergencia c.u. con la convergencia c.t.p. (repass)

Proposición

Si $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

Proposición (teorema de Egorov)

Si $\mu(X) < +\infty$ y $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

La convergencia casi uniforme implica la convergencia en medida

Proposición

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$. Entonces $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

Demostración. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada k en \mathbb{N} ,

$$B(\varepsilon, k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon, k) \cup \left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A(\varepsilon, n) \right) = A(\varepsilon, k) \cup B(\varepsilon, k+1).$$

Luego

$$A(\varepsilon, k) \subseteq B(\varepsilon, k), \quad \mu(A(\varepsilon, k)) \leq \mu(B(\varepsilon, k)).$$

Por la suposición, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B(\varepsilon, k)) = 0$. Luego $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A(\varepsilon, k)) = 0$. □

El concepto de una subsucesión (repass)

Suponemos que $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números
y $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ es una subsucesión estrictamente creciente.

Entonces $(\alpha_{\nu(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que se conoce como **subsucesión** de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ejemplo. Sea $\nu(p) := p^2$. Pongamos $\beta_p := \alpha_{\nu(p)}$.

$$\underbrace{\alpha_1}_{\beta_1}, \alpha_2, \alpha_3, \underbrace{\alpha_4}_{\beta_2}, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \underbrace{\alpha_9}_{\beta_3}, \dots$$

Los elementos $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_9, \dots$ forman una subsucesión de la sucesión original.

Teorema

Sean (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida,
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

Entonces existe $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

En otras palabras, el teorema dice que existe una **subsucesión** de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge μ -casi uniformemente a g .

Demostración, inicio

La hipótesis $f_n \xrightarrow{\mu} g$ significa que $\forall \varepsilon > 0 \quad \mu(A(\varepsilon, n)) \rightarrow 0$.

Por lo tanto, para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe un $K(\varepsilon, \delta)$ tal que

$$\forall n \geq K(\varepsilon, \delta) \quad \mu(A(\varepsilon, n)) < \delta.$$

Construimos una sucesión de índices $(\nu(p))_{p \in \mathbb{N}}$ mediante las reglas:

$$\nu_0 := K\left(\frac{1}{2^0}, \frac{1}{2^0}\right), \quad \nu_p := \max\left\{K\left(\frac{1}{2^p}, \frac{1}{2^p}\right), \nu_{p-1} + 1\right\}.$$

Entonces es fácil ver que $\nu_p > \nu_{p-1}$ y $\mu(A(2^{-p}, \nu(p))) < 2^{-p}$.

Demostración, continuación

Vamos a demostrar que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$.

Consideremos los conjuntos auxiliares que corresponden a la subsucesión $(f_{\nu(p)})_{p \in \mathbb{N}}$:

$$\tilde{A}(\varepsilon, p) := A(\varepsilon, \nu(p)), \quad \tilde{B}(\varepsilon, q) := \bigcup_{p=q}^{\infty} \tilde{A}(\varepsilon, p) = \bigcup_{p=q}^{\infty} A(\varepsilon, \nu(p))$$

El conjunto $\tilde{B}(\varepsilon, q)$ puede ser más pequeño que $B(\varepsilon, \nu(q))$.

Por ejemplo, si $\nu(p) = p^2$, entonces

$$\tilde{B}(\varepsilon, 3) = \tilde{A}(\varepsilon, 3) \cup \tilde{A}(\varepsilon, 4) \cup \tilde{A}(\varepsilon, 5) \cup \dots = A(\varepsilon, 9) \cup A(\varepsilon, 16) \cup A(\varepsilon, 25) \cup \dots$$

Demostración, final

Dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, tenemos por demostrar que $\lim_{q \rightarrow \infty} \mu(\tilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Sea $\delta > 0$. Elijamos un s en \mathbb{N} tal que $2^{-s} < \varepsilon$, $\sum_{p=s}^{\infty} 2^{-p} < \delta$.

Entonces para cualquier $q \geq s$ obtenemos

$$\tilde{B}(\varepsilon, q) \subseteq \tilde{B}(\varepsilon, s) \subseteq \tilde{B}(2^{-s}, s) = \bigcup_{p=s}^{\infty} \tilde{A}(2^{-s}, p) = \bigcup_{p=s}^{\infty} A(2^{-s}, \nu(p)),$$

$$\mu(\tilde{B}(\varepsilon, q)) \leq \sum_{p=s}^{\infty} \mu(A(2^{-p}, \nu(p))) \leq \sum_{p=s}^{\infty} \frac{1}{2^p} < \delta.$$

Hemos demostrado que $\lim_{q \rightarrow \infty} \mu(\tilde{B}(\varepsilon, q)) = 0$.

Del teorema demostrado sale un corolario simple.

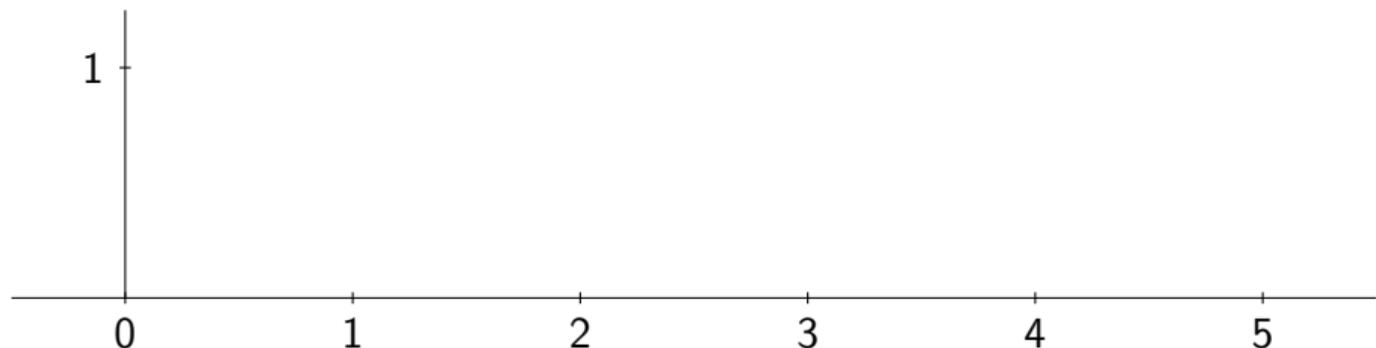
Corolario

Supongamos que $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

Entonces existe $\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $f_{\nu(p)} \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

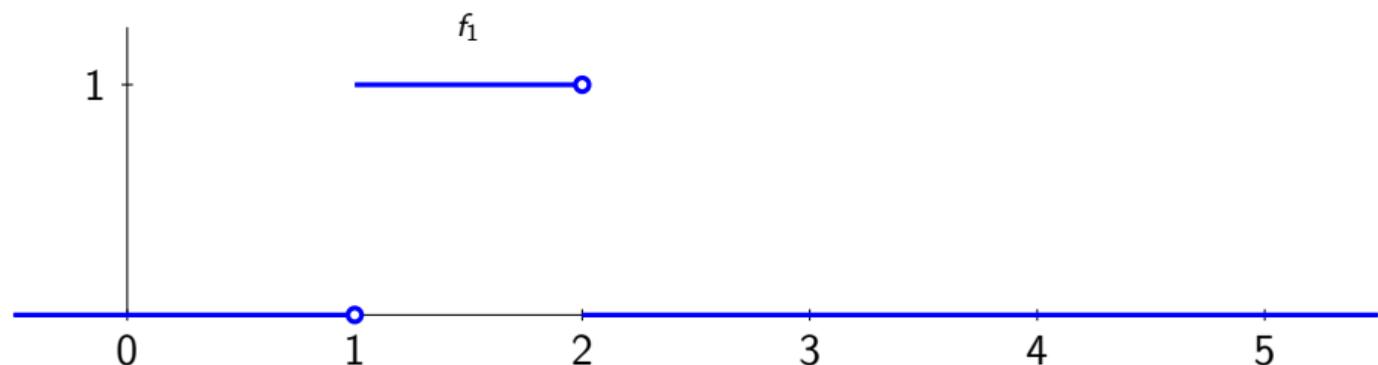
Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n, n+1[}$, $g = 0$.



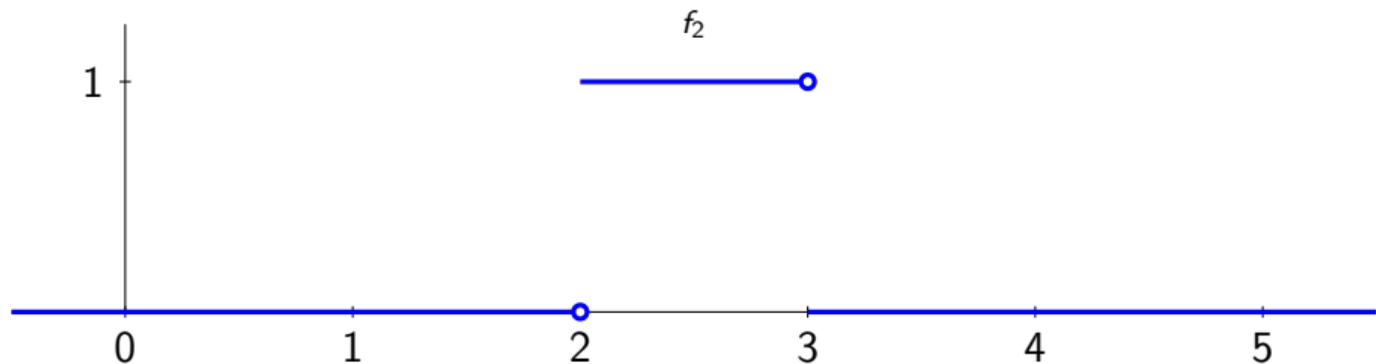
Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n, n+1[}$, $g = 0$.



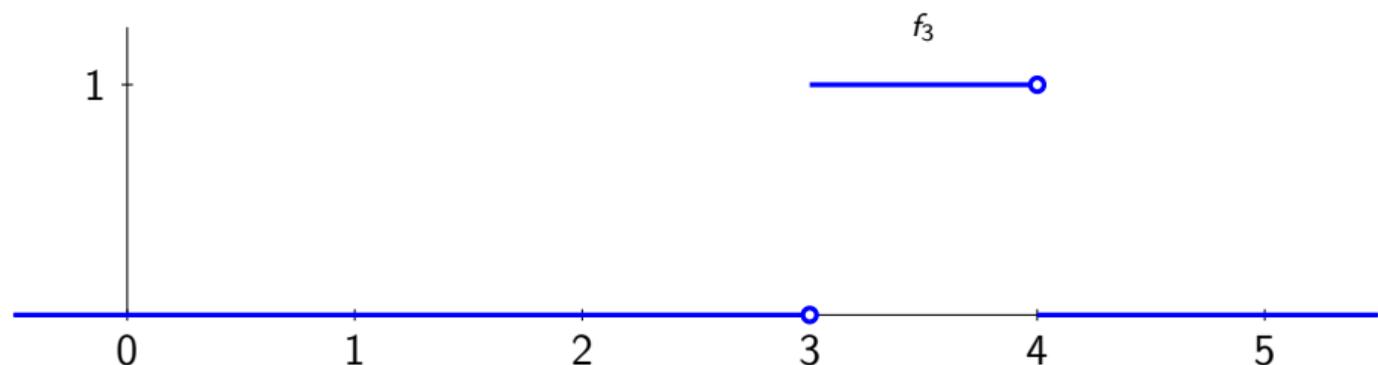
Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n, n+1[}$, $g = 0$.



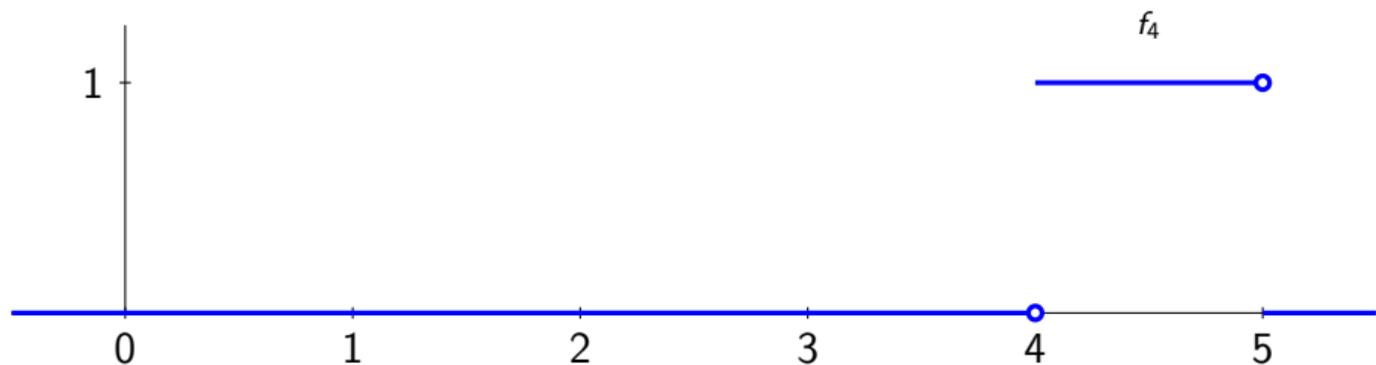
Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n, n+1[}$, $g = 0$.

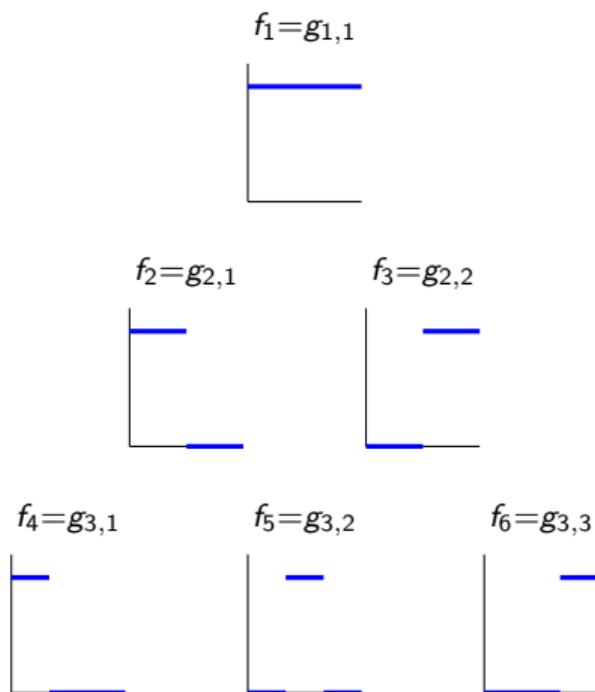


Ejemplo de convergencia puntual, cuando no hay convergencia en medida

$X = \mathbb{R}$, μ de Lebesgue, $f_n = 1_{[n, n+1[}$, $g = 0$.

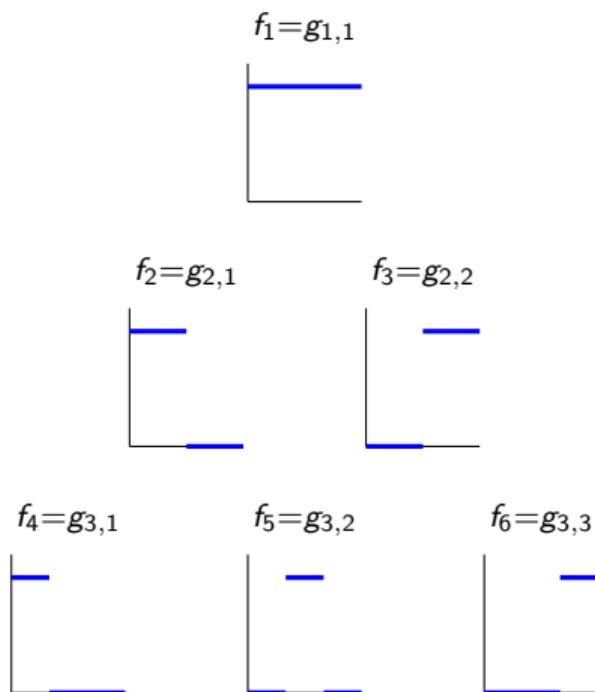


Tarea adicional: ejemplo de convergencia en medida, pero no c.t.p.



$X = [0, 1)$, μ de Lebesgue,
 f_n son funciones indicadoras
de ciertos conjuntos,
 $g = 0$.

Tarea adicional: ejemplo de convergencia en medida, pero no c.t.p.



$X = [0, 1)$, μ de Lebesgue,
 f_n son funciones indicadoras
de ciertos conjuntos,
 $g = 0$.

Tarea: formalizar el ejemplo.
Escribir f_n como $g_{p,q}$,
expresar n en términos de p, q ,
demostrar bien que $\forall x \in [0, 1)$
la sucesión $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge
y que $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

Tarea adicional: un ejemplo relacionado con números racionales

$X = [0, 1]$, μ la medida de Lebesgue.

Numeramos los números racionales de $[0, 1]$ como una sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Por ejemplo, se puede usar la sucesión de Farey:

$$r_1 = \frac{0}{1}, \quad r_2 = \frac{1}{1}, \quad r_3 = \frac{1}{2}, \quad r_4 = \frac{1}{3}, \quad r_5 = \frac{2}{3}, \quad r_6 = \frac{1}{4}, \quad r_7 = \frac{3}{4}, \quad \dots$$

Escribimos r_n como p_n/q_n , donde p_n y q_n son primos relativos. Pongamos

$$f_n(x) := \exp\left(- (p_n - xq_n)^2\right).$$

Demostrar que $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, pero para todo $x \in [0, 1]$ la sucesión $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Construir una subsucesión que converja a 0 casi en todas partes.

Conclusiones

