Varios modos de convergencia

Objetivos. Conocer varios modos de convergencia: convergencia uniforme, convergencia casi uniforme, convergencia casi en todas partes, convergencia respecto a la medida.

Requisitos. Funciones medibles, medida.

Definición de varios modos de convergencia

1. Criterio de la convergencia uniforme. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{C}$ y sea $g\colon X \to \mathbb{C}$ una función. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - g(x)| = 0$,

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq k \quad \forall x \in X \qquad |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Cualquier de las condiciones (a) o (b) se acepta como la definición de la convergencia uniforme. Notación: $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$.

Demostración. Supongamos (a) y demostremos (b). Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe k en $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq k$ se cumple $\|f_n - g\|_{\sup} < \varepsilon$. Entonces para cada x en X se cumple

$$|f_n(x) - g(x)| \leq \|f_n - g\|_{\sup} < \varepsilon.$$

Supongamos (b) y demostremos (a). Sea $\varepsilon > 0$. Aplicando (b) con $\varepsilon/2$ en vez de ε encontramos k en $\mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq k$ y cada x en X se cumple $|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon/2$. Luego para cada $n \geq k$ el número $\varepsilon/2$ sirve como una cota superior del conjunto $\{|f_n(x) - g(x)|\colon\ x \in X\}$, y

$$\|f_n - g\|_{\sup} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Como ε fue arbitario, hemos demostrado que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{\sup} = 0$. $\square$

2. Definición (convergencia puntual). Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $X \to \mathbb{R}$ y sea $g\colon X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f_n converge puntualmente a g (en X) si

$$\forall x \in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x).$$

Notación: $f_n \xrightarrow{X} g$.

3. Observación (la convergencia uniforme implica la convergencia puntual). Si $f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g$, entonces $f_n \xrightarrow{X} g$.

4. Definición (convergencia casi en todas partes). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Se dice que la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a g *casi en todas partes* respecto a la medida μ si

$$\mu\left(\left\{x \in X\colon\, f_n(x) \not\to g(x)\right\}\right) = 0.$$

Notación: $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

5. Observación (la convergencia puntual implica la convergencia casi en todas partes). Si $f_n \xrightarrow{X} g$ y las funciones f_n, g son $\mathcal{F}$-medibles, entonces $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$.

6. Definición (convergencia en medida). Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{M}$-medibles y sea g una función $\mathcal{M}$-medible. Se dice que f_n *converge* a g *en la medida* μ y se escribe $f_n \xrightarrow{\mu} g$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in X\colon\, |f_n(x) - g| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

7. Definición (convergencia casi uniforme). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Se dice que f_n *converge* a g *casi uniforme* respecto a la medida μ y se escribe $f_n \xRightarrow{\mu\text{-c.u.}} g$, si

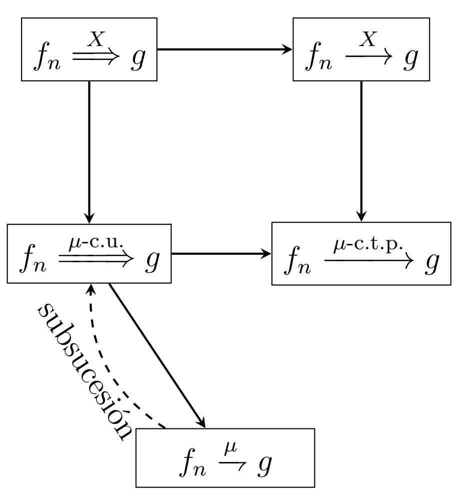
$$\forall \eta > 0 \quad \exists E \in \mathcal{F} \quad \left(\mu(E) \leq \eta \quad \wedge \quad f_n \xRightarrow{X \setminus E} g\right).$$

La convergencia casi uniforme se conoce también como la *convergencia de Egórov.*

Luego vamos a demostrar algunas relaciones entre varios modos de convergencias.

8. Relaciones entre varios modos de convergencia (las demostraremos en las siguientes clases).

en general



en el caso $\mu(X) < +\infty$