Criterio de existencia de límites de funciones en términos de sucesiones (criterio de Heine)

1. Suposiciones. Suponemos que (X, τ) y (Y, υ) son espacios topológicos, Y es de Hausdorff, $D \subset X$, $x_0 \in \mathrm{cl}(D)$, x_0 tiene una base local numerable, esto es, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en τ tal que $x_0 \in V_n$ para cada n en $\mathbb{N}$, y para cada U en τ, si $x_0 \in U$, entonces existe n en $\mathbb{N}$ tal que $V_n \subset U$.

2. Ejemplos.

1. X es un espacio métrico, $x_0 \in X$, $V_n = B(x_0, 1/n)$.
2. $X = [-\infty, +\infty]$, $x_0 = +\infty$, $V_n = (n, +\infty]$.

3. Teorema. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe $L \in Y$ tal que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = L$;

(b) para cualquier sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en D, si $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = x_0$, entonces la sucesión $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tiene un límite.

4. Corolario. Suponemos además que $x_0 \in D$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la función f es continua en el punto x_0;

(b) para cualquier sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en D, si $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = x_0$, entonces la sucesión $\lim\limits_{n \to \infty} f(t_n) = f(x_0)$.

5. Corolario. Suponemos además que (Y, d) es un espacio métrico completo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) existe $L \in Y$ tal que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D}} f(x) = L$;

(b) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un n en $\mathbb{N}$ tal que para cualesquiera t, u en $D \cap V_n$ se tiene que $d(f(t), f(u)) < \varepsilon$.