Funciones contractivas

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

30 de agosto de 2022

Objetivos

- Definir el concepto de funciones contractivas.
- Estudiar algunas de sus propiedades básicas.

Prerrequisitos

- Funciones uniformemente continuas.
- Funciones Lipschitz continuas.
- Iteraciones de una función.

Función contractiva

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f\colon X \to X$ se llama contractiva,
si existe un $L \in [0, 1)$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq L\, d(a, b).$$

Función contractiva

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f: X \to X$ se llama contractiva, si existe un $L \in [0, 1)$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq L\, d(a, b).$$

En otras palabras, $f: X \to X$ es contractiva, si es Lipschitz continua con un coeficiente de Lipschitz estrictamente menor que 1.

Función contractiva

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f : X \to X$ se llama contractiva,
si existe un $L \in [0, 1)$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq L\, d(a, b).$$

En otras palabras, $f : X \to X$ es contractiva,
si es Lipschitz continua con un coeficiente de Lipschitz estrictamente menor que 1.

Otros términos: función contractante, contracción.

Descripción de funciones contractivas en términos de un cociente

Ejercicio.

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$.

Mostrar que f es contractiva si, y sólo si,

$$\sup_{\substack{a,b \in X \\ a \neq b}} \frac{d(f(a), f(b))}{d(a, b)} < 1.$$

Función corta, función estrictamente corta

Definición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$.

Se dice que f es corta o no-expansiva, si

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq d(a, b).$$

Se dice que f es estrictamente corta, si

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) < d(a, b).$$

Descripción de funciones estrictamente cortas en términos de un cociente

Ejercicio.

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$.

Mostrar que f es estrictamente corta si, y sólo si,

$$\forall a, b \in X \qquad \left(a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d(f(a), f(b))}{d(a, b)} < 1\right).$$

Descripción de funciones estrictamente cortas en términos de un cociente

Ejercicio.

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$.

Mostrar que f es estrictamente corta si, y sólo si,

$$\forall a, b \in X \qquad \left(a \neq b \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d(f(a), f(b))}{d(a, b)} < 1\right).$$

Ejercicio. Mostrar que cada función contractiva es estrictamente corta.

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Ejercicio. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Ejercicio. Consideremos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Notemos que para cada x en $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} < 1.$$

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Ejercicio. Consideremos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Notemos que para cada x en $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} < 1.$$

1. Sean $a, b \geq 0$, $a < b$. Usando el teorema del valor medio mostrar que

$$|f(b) - f(a)| < |b - a|.$$

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Ejercicio. Consideremos $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Notemos que para cada x en $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} < 1.$$

1. Sean $a, b \geq 0$, $a < b$. Usando el teorema del valor medio mostrar que

$$|f(b) - f(a)| < |b - a|.$$

2. Sean $a, b \leq 0$, $a < b$. Demostrar la misma desigualdad que en el inciso anterior.

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Seguimos trabajando con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Seguimos trabajando con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0 < b$. Verificar que

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(0)| + |f(0) - f(a)| < |b - a|.$$

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Seguimos trabajando con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0 < b$. Verificar que

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(0)| + |f(0) - f(a)| < |b - a|.$$

4. Usando los incisos anteriores mostrar que f es estrictamente corta.

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Seguimos trabajando con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Seguimos trabajando con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

5. Aplicando la regla de L'Hospital o algunos límites notables mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = 1.$$

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Seguimos trabajando con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

5. Aplicando la regla de L'Hospital o algunos límites notables mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = 1.$$

6. Demostrar que

$$\sup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a\neq b}} \frac{|f(a) - f(b)|}{a - b} = 1.$$

Hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas

Seguimos trabajando con $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x).$$

5. Aplicando la regla de L'Hospital o algunos límites notables mostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = 1.$$

6. Demostrar que

$$\sup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a\neq b}} \frac{|f(a) - f(b)|}{a - b} = 1.$$

7. Demostrar que f no es contractiva.

Iteraciones de funciones contractivas son contractivas

Proposición

Sea X un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente L, $L \in [0, 1)$.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_1$ la función $f^{[n]}$ es contractiva con coeficiente L^n.

Iteraciones de funciones contractivas son contractivas

Proposición

Sea X un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente L, $L \in [0, 1)$.
Entonces para cada n en $\mathbb{N}_1$ la función $f^{[n]}$ es contractiva con coeficiente L^n.

Idea de demostración:

Iteraciones de funciones contractivas son contractivas

Proposición

Sea X un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente L, $L \in [0, 1)$.
Entonces para cada n en $\mathbb{N}_1$ la función $f^{[n]}$ es contractiva con coeficiente L^n.

Idea de demostración: por inducción.

Desigualdad fundamental para funciones contractivas

Richard S. Palais, 2013.

Desigualdad fundamental para funciones contractivas

Richard S. Palais, 2013.

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con un coeficiente L, $L \in [0, 1)$. Entonces para cualesquiera a, b en X

$$d(a, b) \le \frac{1}{1 - L}\big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\big).$$

Demostración de la desigualdad fundamental para funciones contractivas

Sean $a, b \in X$.

$$\begin{aligned} d(a,b) &\le d(a,f(a)) + d(f(a),f(b)) + d(f(b),b) \\ &\le d(a,f(a)) + Ld(a,b) + d(b,f(b)). \end{aligned}$$

Demostración de la desigualdad fundamental para funciones contractivas

Sean $a, b \in X$.

$$\begin{aligned} d(a,b) &\leq d(a,f(a)) + d(f(a),f(b)) + d(f(b),b) \\ &\leq d(a,f(a)) + Ld(a,b) + d(b,f(b)). \end{aligned}$$

Pasamos el sumando $Ld(a,b)$ al lado izquierdo:

$$(1-L)d(a,b) \leq d(a,f(a)) + (b,f(b)).$$

Por la hipótesis, $L < 1$, así que $1 - L > 0$. Dividimos ambos lados de entre $1 - L$ y obtenemos

$$d(a,b) \leq \frac{1}{1-L}\big(d(a,f(a)) + d(b,f(b))\big).$$

Punto fijo de una función

Definición

Sea X un conjunto, sea $f : X \to X$ y sea $p \in X$.

Se dice que p es un punto fijo de f, si $f(p) = p$.

Unicidad del punto fijo de funciones contractivas

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva.

Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Entonces $a = b$.

Unicidad del punto fijo de funciones contractivas

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva.

Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Entonces $a = b$.

Demostración. Aplicamos la desigualdad fundamental:

$$d(a, b) \leq$$

Unicidad del punto fijo de funciones contractivas

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva.
Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Entonces $a = b$.

Demostración. Aplicamos la desigualdad fundamental:

$$d(a, b) \leq \frac{1}{1 - L}\big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\big) =$$

Unicidad del punto fijo de funciones contractivas

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva.
Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Entonces $a = b$.

Demostración. Aplicamos la desigualdad fundamental:

$$d(a, b) \leq \frac{1}{1 - L}\big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\big) = 0.$$