Funciones contractivas

1 Definición (función contractiva)**.** Sea (X, d) un espacio métrico. Una función $f\colon X \to X$ se llama *contractiva* (*función contractante*, *contracción*) si existe un $L \in [0, 1)$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \le L\, d(a, b).$$

En otras palabras, una función $X \to X$ se llama contractiva si es Lipschitz continua con un coeficiente de Lipschitz estrictamente menor que 1.

2 Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$. Mostrar que f es contractiva si, y sólo si,

$$\sup_{\substack{a,b\in X\\ a\ne b}} \frac{d(f(a), f(b))}{d(a, b)} < 1.$$

3 Definición (función corta, función estrictamente corta)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$. Se dice que f es *corta* o *no-expansiva* si

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \le d(a, b).$$

Se dice que f es *estrictamente corta* si

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) < d(a, b).$$

4 Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$. Mostrar que f es estrictamente corta si, y sólo si,

$$\forall a, b \in X \qquad \left(a \ne b \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{d(f(a), f(b))}{d(a, b)} < 1\right).$$

5 Observación. Obviamente, cada función contractiva es estrictamente corta.

6 Ejercicio (hay funciones estrictamente cortas que no son contractivas)**.** Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Notemos que para cada x en $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} < 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

- Sean $a, b \geq 0$, $a < b$. Usando el teorema del valor medio mostrar que

$$|f(b) - f(a)| < |b - a|.$$

- Sean $a, b \leq 0$, $a < b$. Usando el teorema del valor medio mostrar que

$$|f(b) - f(a)| < |b - a|.$$

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0 < b$. Verificar que

$$|f(b) - f(a)| \leq |f(b) - f(0)| + |f(0) - f(a)| < |b - a|.$$

- Usando los incisos anteriores mostrar que f es estrictamente corta.

- Aplicando la regla de L'Hospital o algunos límites notables mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = 1.$$

- Demostrar que

$$\sup_{\substack{a,b \in \mathbb{R} \\ a \neq b}} \frac{|f(a) - f(b)|}{a - b} = 1.$$

- Demostrar que f no es contractiva.

7 Lema (iteraciones de funciones contractivas son contractivas)**.** *Sea X un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente L, $L \in [0, 1)$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}_1$ la función $f^{[n]}$ es contractiva con coeficiente L^n.*

Demostración. Se demuestra fácilmente por inducción. □

8 Proposición (desigualdad fundamental para funciones contractivas; Richard S. Palais, 2013)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con un coeficiente L, $L \in [0, 1)$. Entonces para cualesquiera a, b en X*

$$d(a, b) \leq \frac{1}{1 - L}\big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\big). \tag{1}$$

Demostración. Aplicamos la desigualdad del triángulo y luego la suposición que f es contractiva con coeficiente L:

$$\begin{aligned} d(a,b) &\le d(a,f(a)) + d(f(a),f(b)) + d(f(b),b) \\ &\le d(a,f(a)) + Ld(a,b) + d(b,f(b)). \end{aligned}$$

Pasamos el sumando $Ld(a,b)$ al lado izquierdo:

$$(1-L)d(a,b) \le d(a,f(a)) + (b,f(b)). \tag{2}$$

Por la hipótesis, $L < 1$, así que $1 - L > 0$. Dividimos ambos lados de (2) entre $1 - L$ y obtenemos (1). $\square$

9 Definición (punto fijo de una función)**.** Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $p \in X$. Se dice que p es un *punto fijo* de f si $f(p) = p$.

10 Proposición (unicidad del punto fijo de funciones contractivas)**.** *Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva. Supongamos que $a,b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Entonces $a = b$.*

Demostración. Aplicamos (1) a los puntos dados a y b. El lado derecho se anula, por eso concluimos que $d(a,b) = 0$ y $a = b$. $\square$