El cálculo funcional continuo para elementos normales

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad e.

Si X es un conjunto, $Y \subseteq X$, entonces denotamos por $\mathrm{inj}_{Y,X}$ a la inyección $Y \to X$.

1 Teorema (teorema espectral para elementos normales, repaso)**.** *Sea x un elemento normal de $\mathcal{A}$. Entonces existe un único C*-isomorfismo $\Lambda\colon \mathcal{A}[x] \to C(\mathrm{Sp}(x))$ tal que*

$$\Lambda(x) = \mathrm{inj}_{\mathrm{Sp}(x),\mathbb{C}}\,.$$

Más aún, para cualquier polinomio p con coeficientes complejos en dos variables,

$$\Lambda(p(x, x^*))(z) = p(z, \overline{z}) \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

2 Definición (el cálculo funcional continuo para elementos normales)**.** La función Λ^{-1} se llama el *cálculo funcional continuo* para el elemento normal x. Dada una función f de clase $C(\mathrm{Sp}(x))$, se pone $f(x) := \Lambda^{-1}(f)$.

Del Teorema 1 se sigue que la función Λ^{-1} está bien definida y es un isomorfismo C*. Vamos a escribir de manera más explícita las propiedades de Λ^{-1} usando la notación del cálculo funcional continuo. Todas estas propiedades son corolarios inmediatos del Teorema 1.

3 Proposición (propiedades elementales del cálculo funcional continuo para elementos normales)**.** *Sea x un elemento normal de $\mathcal{A}$.*

1. *Propiedades algebraicas del cálculo funcional continuo. Si $f, g \in C(\mathrm{Sp}(x))$, $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces*

   $$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \quad \overline{f}(x) = f(x)^a st.$$

2. *Propiedad isométrica del cálculo funcional continuo. Si $f \in C(\mathrm{Sp}(x))$, entonces*

   $$\|f(x)\| = \sup_{t \in \mathrm{Sp}(x)} |f(t)|.$$

3. *Propiedad suprayectiva del cálculo funcional continuo. Si $y \in \mathcal{A}[x]$, entonces existe f en $C(\mathrm{Sp}(x))$ tal que $f(x) = y$.*

4. La imagen de la constante 1 *bajo el cálculo funcional continuo.*

$$1_{\mathrm{Sp}(x)}(x) = e.$$

5. La imagen de la inyección idéntica bajo el cálculo funcional continuo.

$$\mathrm{inj}_{\mathrm{Sp}(x),\mathbb{C}}(x) = x.$$

6. Las imágenes de polinomios bajo el cálculo funcional continuo. Sea p un polinomio en dos variables y sea $f\colon \mathrm{Sp}(x) \to \mathbb{C}$ definida como $f(z) = p(z, \overline{z})$. Entonces

$$f(x) = p(x, x^*).$$

De manera más explícita, si

$$f(z) = \sum_{j+k\le m} \alpha_{j,k} z^j \overline{z}^k \qquad (z \in \mathrm{Sp}(x)),$$

entonces

$$f(x) = \sum_{j+k\le m} \alpha_{j,k} x^j (x^*)^k. \tag{1}$$

Denotemos por $\mathcal{Q}$ al conjunto de la funciones $\mathrm{Sp}(x) \to \mathbb{C}$ que se puede representar en la forma $f(z) = p(z, \overline{z})$, donde p es un polinomio en dos variables.

4 Lema. *$\mathcal{Q}$ es un subconjunto denso en $C(\mathrm{Sp}(x))$. En otras palabras, para cada g en $C(\mathrm{Sp}(x))$ existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{Q}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathrm{Sp}(x)} |f_n(z) - g(z)| = 0.$$

Demostración. El conjunto $\mathcal{Q}$ es cerrado bajo las operaciones algebraicas y la involución (conjugación por puntos), y contiene las constantes. Por lo tanto, $\mathrm{cl}(\mathcal{Q})$ es un subálgebra C* con identidad del álgebra $C(\mathrm{Sp}(x))$. Además, $\mathcal{Q}$ separa los puntos, por eso $\mathrm{cl}(\mathcal{Q})$ también separa los puntos. Por el teorema de Stone–Weierstrass, $\mathrm{cl}(\mathcal{Q}) = C(\mathrm{Sp}(x))$. □

5 Proposición (el cálculo funcional continuo en términos de límites de polinomios)**.** *Sea $g \in C(\mathrm{Sp}(x))$ y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{Q}$ que converge uniformemente a g. Entonces*

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x). \tag{2}$$

Notemos que para las funciones de clase $\mathcal{Q}$ el cálculo funcional continuo actúa de manera muy simple, por la fórmula (1). La Proposición 5 da una receta constructiva como calcular $g(x)$ para g en $C(\mathrm{Sp}(x))$.

6 Observación. Es natural preguntarse si el cálculo funcional continuo se puede *definir* mediante la fórmula (2), sin estudiar la transformada de Gelfand Γ y su modificación Λ. El problema es demostrar que para f en $\mathcal{Q}$ se tiene la propiedad isométrica $\|f(x)\| = \|f\|$. Luego la sucesión en el lado derecho de (2) sería de Cauchy y tendría un límite. Sin embargo, yo no sé cómo demostrar la propiedad isométrica sin estudiar las propiedades de la transformada de Gelfand.

7 Teorema (teorema del mapeo del espectro para el cálculo funcional continuo)**.** *Sea x un elemento normal de $\mathcal{A}$ y sea $f \in C(\mathrm{Sp}(x))$. Entonces*

$$\mathrm{Sp}(f(x)) = f[\mathrm{Sp}(x)].$$

Demostración. Como Λ es un isomorfismo C* de álgebras,

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(f(x)) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}[x]}(f(x)) = \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}[x]}(\Lambda^{-1}(f)) = \mathrm{Sp}_{C(\mathrm{Sp}(x))}(f).$$

Finalmente notamos que la última expresión es igual a $f[\mathrm{Sp}(x)]$. □

Criterios de algunas subclases de elementos normales

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra C* con identidad e.

8 Proposición. *Sea x un elemento normal de $\mathcal{A}$.*

1. *x es autoadjunto si, y solo si,* $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \mathbb{R}$.
2. *x es unitario si, y solo si,* $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \mathbb{T}$.
3. *x es una proyección si, y solo si,* $\mathrm{Sp}(x) \subseteq \{0, 1\}$.

Demostración. Demostremos la primera afirmación. Denotemos por Λ al C*-isomorfismo definido antes.

$$\begin{aligned} x = x^* \quad &\iff \quad \Lambda(x) = \overline{\Lambda(x)} \quad \iff \quad \Lambda(x)[\mathrm{Sp}(x)] \subseteq \mathbb{R} \\ &\iff \quad \mathrm{inj}_{\mathrm{Sp}(x),\mathbb{C}}(\mathrm{Sp}(x)) \subseteq \mathbb{R} \quad \iff \quad \mathrm{Sp}(x) \subseteq \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

9 Proposición. *Sea x un elemento positivo en $\mathcal{A}$. Entonces existe un único elemento positivo y en $\mathcal{A}$ tal que $x = y^2$.*

Demostración. Ya sabemos que $\mathrm{Sp}(x) \subseteq [0, \|x\|]$. Definimos $f\colon \mathrm{Sp}(x) \to \mathbb{C}$, $f(t) := \sqrt{t}$. Definimos $g\colon \mathrm{Sp}(x) \to \mathbb{C}$, $g(t) := t^{1/4}$. Entonces $f^2 = \mathrm{inj}_{\mathrm{Sp}(x),\mathbb{C}}$ y $g^2 = f$. Pongamos $y := f(x)$. Entonces $y^2 = x$. Además, $g(x)^* g(x) = g(x)^2 = y$, así que $y \geq 0$.

Demostremos la unicidad. Sea $a \in \mathcal{A}$, $a \geq 0$, tal que $a^2 = x$. Elegimos alguna sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polinomios que converge uniformemente a f en el compacto $\mathrm{Sp}(x)$. Sea $q_n(t) = p_n(t^2)$. Como $\mathrm{Sp}(a) \subseteq [0, +\infty)$ y

$$\mathrm{Sp}(x) = \mathrm{Sp}(a^2) = \{t^2\colon\ t \in \mathrm{Sp}(a)\},$$

obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathrm{Sp}(a)} |q_n(t) - t| = \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathrm{Sp}(a)} |p_n(t^2) - f(t^2)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathrm{Sp}(x)} |p_n(z) - f| = 0.$$

Por el cálculo funcional continuo para a, $q_n(a) \to a$. Luego

$$a = \lim_{n\to\infty} q_n(a) = \lim_{n\to\infty} p_n(a^2) = \lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x) = y. \qquad \square$$

Si $x \geq 0$, entonces la raíz cuadrada de x se denota por $\sqrt{x}$ o por $x^{1/2}$. Para un x general, se denota por $\mathrm{abs}(x)$ o por $|x|$ el elemento $\sqrt{x^* x}$.

10 Proposición. *Cada elemento de $\mathcal{A}$ es una combinación lineal finita de elementos unitarios.*

Demostración. 1. Primero consideremos el caso cuando $x^* = x$ y $\|x\| \leq 1$. En este caso $\mathrm{Sp}(x) \subseteq [-1, 1]$. La función $f\colon \mathrm{Sp}(x) \to \mathbb{C}$,

$$f(z) := z + \mathrm{i}\sqrt{1 - z^2},$$

es continua en $\mathrm{Sp}(x)$. Más aún,

$$f\,\overline{f} = \overline{f}\,f = 1_{\mathrm{Sp}(x)}, \qquad \frac{f + \overline{f}}{2} = \mathrm{id}_{\mathrm{Sp}(x)}.$$

Pongamos $u := f(x)$. Las propiedades del cálculo funcional continuo implican que

$$uu^* = u^* u = e, \qquad \frac{u + u^*}{2} = x.$$

2. Supongamos que $y^* = y$. Pongamos $x \coloneqq y/(\|y\| + 1)$. Entonces $\|x\| < 1$, y

$$x = \frac{u + u^*}{2}.$$

Luego

$$y = \frac{\|y\| + 1}{2}\, u + \frac{\|y\| + 1}{2}\, u^*.$$

3. En el caso general, si $a \in \mathcal{A}$, representamos a como una combinación lineal de dos elementos autoadjuntos y aplicamos el inciso 2. $\square$

11 Teorema (sobre monomorfismos C*)**.** *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ álgebras C* con identidades y sea $\Phi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un C*-homomorfismo inyectivo. Entonces Φ es isométrico y preserva los espectros.*