Continuidad del desplazamiento

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

17 de enero de 2025

Objetivos

- Introducir los operadores de traslación τ_h:

$$(\tau_h f)(x) := f(x-h).$$

- Demostrar que la función $h \mapsto \tau_h f$ es continua en ciertos espacios.

Prerrequisitos

- Los espacios $L^p(\mathbb{R})$.
- Funciones uniformemente continuas, el medidor de continuidad uniforme.
- La integral de Lebesgue y traslaciones.

Desplazamientos de una función

Sea $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ y sea $h \in \mathbb{R}$.

Denotemos por $\tau_h f$ a la función

$$(\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

Ejercicio. Sea $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$ y $h \in \mathbb{R}$.

Demostrar que $\tau_h f \in L^p(\mathbb{R})$ y

$$\|\tau_h f\|_p = \|f\|_p.$$

Repaso: el medidor de continuidad uniforme

Dada $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, se define

$$\omega_f(\delta) := \sup\left\{|f(x) - f(y)| : \ x, y \in \mathbb{R}, \ |x - y| \leq \delta\right\}.$$

Proposición

Sea $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Entonces,

$$f \in C_u(\mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \inf_{\delta > 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

Repaso: el espacio $C_c(\mathbb{R})$

Dada f en $C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$\operatorname{supp}(f) := \operatorname{clos}\left(\{x \in \mathbb{R} :\ f(x) \neq 0\}\right).$$

Repaso: el espacio $C_c(\mathbb{R})$

Dada f en $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

$$\operatorname{supp}(f) := \operatorname{clos}\left(\{x \in \mathbb{R} : \ f(x) \neq 0\}\right).$$

$$C_c(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C}) : \ \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto} \Big\}.$$

Repaso: el espacio $C_c(\mathbb{R})$

Dada f en $C(\mathbb{R},\mathbb{C})$,

$$\operatorname{supp}(f) := \operatorname{clos}\left(\{x \in \mathbb{R} \colon \; f(x) \neq 0\}\right).$$

$$C_c(\mathbb{R}) := \Big\{ f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C}) \colon \; \operatorname{supp}(f) \text{ es compacto} \Big\}.$$

Proposición

Sea $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Entonces,

$$f \in C_c(\mathbb{R}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists L > 0 \quad \operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L].$$

Las funciones continuas de soporte compacto son acotadas y uniformemente continuas

Proposición

$C_c(\mathbb{R}) \subseteq C_{bu}(\mathbb{R})$.

Demostración, inicio

Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$. Elegimos $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Demostración, inicio

Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$. Elegimos $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

f es continua en $[-2L, 2L]$.

Demostración, inicio

Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$. Elegimos $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

f es continua en $[-2L, 2L]$.

Como $[-2L, 2L]$ es un espacio compacto métrico,
f es acotada y uniformemente continua en $[-2L, 2L]$.

Demostración, inicio

Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$. Elegimos $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

f es continua en $[-2L, 2L]$.

Como $[-2L, 2L]$ es un espacio compacto métrico,
f es acotada y uniformemente continua en $[-2L, 2L]$.

Por lo tanto, la imagen de f es la unión de dos conjuntos acotados:

$$f[\mathbb{R}] = f[[-L, L]] \cup f[\mathbb{R} \setminus [-L, L]] = f[[-L, L]] \cup \{0\}.$$

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en $[-2L, 2L]$, elegimos $\delta > 0$ tal que $\delta < L$ y

$$\forall x, y \in [-2L, 2L] \qquad |x - y| < \delta \qquad \implies \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en $[-2L, 2L]$, elegimos $\delta > 0$ tal que $\delta < L$ y

$$\forall x, y \in [-2L, 2L] \qquad |x - y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dados x, y en $\mathbb{R}$, consideremos dos casos:

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en $[-2L, 2L]$, elegimos $\delta > 0$ tal que $\delta < L$ y

$$\forall x, y \in [-2L, 2L] \qquad |x - y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dados x, y en $\mathbb{R}$, consideremos dos casos:

- $x, y \in [-2L, 2L]$. Se aplica lo de arriba.

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en $[-2L, 2L]$, elegimos $\delta > 0$ tal que $\delta < L$ y

$$\forall x, y \in [-2L, 2L] \qquad |x - y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dados x, y en $\mathbb{R}$, consideremos dos casos:

- $x, y \in [-2L, 2L]$. Se aplica lo de arriba.
- $|x| > 2L$ o $|y| > 2L$. Si $|x| > 2L$, entonces

$$|y| \geq |x| - |x - y| > 2L - \delta > L.$$

Demostración, final

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en $[-2L, 2L]$, elegimos $\delta > 0$ tal que $\delta < L$ y

$$\forall x, y \in [-2L, 2L] \qquad |x - y| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dados x, y en $\mathbb{R}$, consideremos dos casos:

- $x, y \in [-2L, 2L]$. Se aplica lo de arriba.
- $|x| > 2L$ o $|y| > 2L$. Si $|x| > 2L$, entonces

  $$|y| \geq |x| - |x - y| > 2L - \delta > L.$$

  Entonces, en este caso, $f(x) = f(y) = 0$.

Continuidad del desplazamiento en $C_{bu}(\mathbb{R})$

Proposición

Sea $f \in C_{bu}(\mathbb{R})$ y sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{b \to a} \|\tau_b f - \tau_a f\|_{\sup} = 0.$$

Demostración

Para a, b en $\mathbb{R}$ y cada x en $\mathbb{R}$,

$$|(\tau_b f)(x) - (\tau_a f)(x)|$$

Demostración

Para a, b en $\mathbb{R}$ y cada x en $\mathbb{R}$,

$$|(\tau_b f)(x) - (\tau_a f)(x)| =$$

Demostración

Para a, b en $\mathbb{R}$ y cada x en $\mathbb{R}$,

$$|(\tau_b f)(x) - (\tau_a f)(x)| = |f(x-b) - f(x-a)| \leq$$

Demostración

Para a, b en $\mathbb{R}$ y cada x en $\mathbb{R}$,

$$|(\tau_b f)(x) - (\tau_a f)(x)| = |f(x-b) - f(x-a)| \leq \omega_f(|b-a|).$$

Demostración

Para a, b en $\mathbb{R}$ y cada x en $\mathbb{R}$,

$$|(\tau_b f)(x) - (\tau_a f)(x)| = |f(x-b) - f(x-a)| \leq \omega_f(|b-a|).$$

Por lo tanto,

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_{\sup} \leq \omega_f(|b-a|),$$

Demostración

Para a, b en $\mathbb{R}$ y cada x en $\mathbb{R}$,

$$|(\tau_b f)(x) - (\tau_a f)(x)| = |f(x - b) - f(x - a)| \leq \omega_f(|b - a|).$$

Por lo tanto,

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_{\sup} \leq \omega_f(|b - a|),$$

Como f es uniformemente continua,

Demostración

Para a, b en $\mathbb{R}$ y cada x en $\mathbb{R}$,

$$|(\tau_b f)(x) - (\tau_a f)(x)| = |f(x-b) - f(x-a)| \leq \omega_f(|b-a|).$$

Por lo tanto,

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_{\sup} \leq \omega_f(|b-a|),$$

Como f es uniformemente continua, esta expresión tiende a 0 cuando $b \to a$.

Continuidad del desplazamiento respecto N_p, para f en $C_c(\mathbb{R})$

Proposición

Sean $f \in C_c(\mathbb{R})$ $p \in [1, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{b \to a} N_p(\tau_b f - \tau_a f) = 0.$$

Demostración, inicio

Sea $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Demostración, inicio

Sea $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_a f)$$

Demostración, inicio

Sea $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_a f) \ \subseteq$$

Demostración, inicio

Sea $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_a f) \subseteq [a - L, a + L].$$

Demostración, inicio

Sea $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_a f) \;\subseteq\; [a - L, a + L].$$

Sea b en $\mathbb{R}$ tal que $|b - a| < L$. Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_b f)$$

Demostración, inicio

Sea $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_a f) \ \subseteq \ [a - L, a + L].$$

Sea b en $\mathbb{R}$ tal que $|b - a| < L$. Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_b f) \ \subseteq$$

Demostración, inicio

Sea $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_a f) \;\subseteq\; [a - L, a + L].$$

Sea b en $\mathbb{R}$ tal que $|b - a| < L$. Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_b f) \;\subseteq\; [b - L, b + L]$$

Demostración, inicio

Sea $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_a f) \subseteq [a - L, a + L].$$

Sea b en $\mathbb{R}$ tal que $|b - a| < L$. Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_b f) \subseteq [b - L, b + L] \subseteq$$

Demostración, inicio

Sea $L > 0$ tal que $\operatorname{supp}(f) \subseteq [-L, L]$.

Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_a f) \;\subseteq\; [a - L, a + L].$$

Sea b en $\mathbb{R}$ tal que $|b - a| < L$. Entonces,

$$\operatorname{supp}(\tau_b f) \;\subseteq\; [b - L, b + L] \;\subseteq\; [a - 2L, a + 2L].$$

Demostración, final

Luego,

$$N_p(\tau_b f - \tau_a f)^p$$

Demostración, final

Luego,

$$N_p(\tau_b f - \tau_a f)^p =$$

Demostración, final

Luego,

$$N_p(\tau_b f - \tau_a f)^p = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-b) - f(x-a)|^p \, \mathrm{d}x$$

Demostración, final

Luego,

$$
\begin{aligned}
N_p(\tau_b f - \tau_a f)^p &= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-b) - f(x-a)|^p \,\mathrm{d}x \\
&=
\end{aligned}
$$

Demostración, final

Luego,

$$\begin{aligned} N_p(\tau_b f - \tau_a f)^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-b) - f(x-a)|^p \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{[a-2L, a+2L]} |f(x-b) - f(x-a)| \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Demostración, final

Luego,

$$
\begin{aligned}
N_p(\tau_b f - \tau_a f)^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-b) - f(x-a)|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{[a-2L,a+2L]} |f(x-b) - f(x-a)| \,\mathrm{d}x \\
&\leq
\end{aligned}
$$

Demostración, final

Luego,

$$
\begin{aligned}
N_p(\tau_b f - \tau_a f)^p &= \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x-b) - f(x-a)|^p \,\mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{[a-2L,a+2L]} |f(x-b) - f(x-a)| \,\mathrm{d}x \\
&\leq 4L\,\omega_f(|b-a|).
\end{aligned}
$$

Demostración, final

Luego,

$$\begin{aligned}N_p(\tau_b f - \tau_a f)^p &= \int_{\mathbb{R}} |f(x-b) - f(x-a)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{[a-2L,a+2L]} |f(x-b) - f(x-a)| \,\mathrm{d}x \\ &\leq 4L\,\omega_f(|b-a|).\end{aligned}$$

Como $f \in C_u(\mathbb{R})$, la última expresión tiende a 0 cuando $b \to a$.

Continuidad del desplazamiento en $L^p(\mathbb{R})$

Teorema

Sean $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\lim_{b \to a} \|\tau_b f - \tau_a f\|_p = 0.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$,

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_p <$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior,

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall b \in (a - \delta, a + \delta) \qquad \|\tau_b g - \tau_a g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall b \in (a - \delta, a + \delta) \qquad \|\tau_b g - \tau_a g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, para cada b en $(a - \delta, a + de)$, obtenemos

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_p \leq$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall b \in (a - \delta, a + \delta) \qquad \|\tau_b g - \tau_a g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, para cada b en $(a - \delta, a + de)$, obtenemos

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_p \leq \|\tau_b (f - g)\|_p + \|\tau_b g - \tau_a g\|_p + \|\tau_a (g - f)\|_p$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall b \in (a - \delta, a + \delta) \qquad \|\tau_b g - \tau_a g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, para cada b en $(a - \delta, a + de)$, obtenemos

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_p \leq \|\tau_b(f - g)\|_p + \|\tau_b g - \tau_a g\|_p + \|\tau_a(g - f)\|_p <$$

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la densidad de $C_c(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$, encontramos g en $C_c(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la proposición anterior, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall b \in (a - \delta, a + \delta) \qquad \|\tau_b g - \tau_a g\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces, para cada b en $(a - \delta, a + de)$, obtenemos

$$\|\tau_b f - \tau_a f\|_p \leq \|\tau_b (f - g)\|_p + \|\tau_b g - \tau_a g\|_p + \|\tau_a (g - f)\|_p < \varepsilon.$$