Continuidad de operaciones lineales en espacios normados (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko,
http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

30 de marzo de 2022

Espacio vectorial topológico

Sea V un espacio vectorial complejo.

Denotemos por A la operación de adición:

$$A\colon V \times V \to V, \qquad A(u, v) := u + v.$$

Denotemos por M la operación de multiplicación por escalares:

$$M\colon \mathbb{C} \times V \to V, \qquad M(\lambda, v) := \lambda v.$$

Espacio vectorial topológico

Sea V un espacio vectorial complejo.

Denotemos por A la operación de adición:

$$A\colon V \times V \to V, \qquad A(u, v) := u + v.$$

Denotemos por M la operación de multiplicación por escalares:

$$M\colon \mathbb{C} \times V \to V, \qquad M(\lambda, v) := \lambda v.$$

Definición. Sea V un espacio vectorial complejo y sea τ una topología en en V.
Se dice que (V, τ) es un espacio vectorial topológico si A y M son continuas.

Topología del producto de dos espacios topológicos (repaso)

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos.

Topología del producto de dos espacios topológicos (repaso)

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos.

Recordar la definición de la topología del producto en $X_1 \times X_2$.

Topología del producto de dos espacios topológicos (repaso)

Sean (X_1, τ_1) y (X_2, τ_2) espacios topológicos.

Recordar la definición de la topología del producto en $X_1 \times X_2$.

Mostrar que los conjuntos de la forma

$$A_1 \times A_2, \qquad A_1 \in \tau_1, \quad A_2 \in \tau_2,$$

son elementos de la topología del producto.

Proposición (EN es EVT)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea τ la topología inducida por la norma.

Entonces (V, τ) es un espacio vectorial topológico.

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

Dado (a, b) en V^2, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (a, b):

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

Dado (a, b) en V^2, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (a, b):

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2).$$

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

Dado (a, b) en V^2, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (a, b):

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2).$$

Notemos que

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2) = \Big\{(u, v) \in V^2 \colon \quad \|u - a\| < \delta_1 \quad \wedge \quad \|v - b\| < \delta_2\Big\}.$$

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $V \times V$?

El espacio V^2 se considera con la topología del producto.

Dado (a, b) en V^2, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (a, b):

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2).$$

Notemos que

$$B_V(a, \delta_1) \times B_V(b, \delta_2) = \Big\{(u, v) \in V^2 : \quad \|u - a\| < \delta_1 \quad \wedge \quad \|v - b\| < \delta_2\Big\}.$$

Más aún, cualquier vecindad abierta de (a, b) contiene un conjunto de esta forma.

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

Dado $(\xi, a) \in \mathbb{C} \times V$, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (ξ, a):

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

Dado $(\xi, a) \in \mathbb{C} \times V$, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (ξ, a):

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2).$$

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

Dado $(\xi, a) \in \mathbb{C} \times V$, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (ξ, a):

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2).$$

Notemos que

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2) = \Big\{(\eta, u) \in \mathbb{C} \times V : \quad |\eta - \xi| < \delta_1 \quad \wedge \quad \|u - a\| < \delta_2\Big\}.$$

EN es EVT: ¿qué vecindades usamos en $\mathbb{C} \times V$?

El espacio $\mathbb{C} \times V$ también se considera con la topología del producto.

Dado $(\xi, a) \in \mathbb{C} \times V$, los siguientes conjuntos son vecindades abiertas de (ξ, a):

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2).$$

Notemos que

$$B_{\mathbb{C}}(\xi, \delta_1) \times B_V(a, \delta_2) = \Big\{(\eta, u) \in \mathbb{C} \times V : \quad |\eta - \xi| < \delta_1 \quad \wedge \quad \|u - a\| < \delta_2\Big\}.$$

Más aún, cualquier vecindad abierta de (ξ, a) contiene un conjunto de esta forma.

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$.

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\|$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| =$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\|$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\| =$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\|$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u, v) - A(a, b)\| = \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\|$$
$$\leq$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \delta + \delta\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\|A(u,v) - A(a,b)\| = \|(u+v) - (a+b)\| = \|(u-a) + (v-b)\|$$
$$\leq \|u-a\| + \|v-b\| < \delta + \delta =$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \delta + \delta = \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la adición

Sean $a, b \in V$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $u, v \in V$, $\|u - a\| < \delta$, $\|v - b\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \|A(u, v) - A(a, b)\| &= \|(u + v) - (a + b)\| = \|(u - a) + (v - b)\| \\ &\leq \|u - a\| + \|v - b\| < \delta + \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| =$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| = \|\eta u - \xi a\| =$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \, \|u - a\| + |\eta - \xi| \, \|a\| \end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}
\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\
&\leq |\eta|\,\|u - a\| + |\eta - \xi|\,\|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta\|a\| \\
&=
\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}
\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\
&\le |\eta|\,\|u - a\| + |\eta - \xi|\,\|a\| \le (\delta + |\xi|)\delta + \delta\|a\| \\
&= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta <
\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta :=$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned}
\|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\
&\leq |\eta|\,\|u - a\| + |\eta - \xi|\,\|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta\|a\| \\
&= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta < (|\xi| + \|a\| + 1)\delta <
\end{aligned}$$

EN es EVT: continuidad de la multiplicación por escalares

Sean $a \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$. Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{|\xi| + \|a\| + 1 + \varepsilon}.$$

Si $u \in V$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\|u - a\| < \delta$, $|\eta - \xi| < \delta$, entonces $|\eta| = |\eta - \xi + \xi| < \delta + |\xi|$,

$$\begin{aligned} \|M(\eta, u) - M(\xi, a)\| &= \|\eta u - \xi a\| = \|\eta u - \eta a + \eta a - \xi a\| \\ &\leq |\eta| \, \|u - a\| + |\eta - \xi| \, \|a\| \leq (\delta + |\xi|)\delta + \delta\|a\| \\ &= (|\xi| + \|a\| + \delta)\delta < (|\xi| + \|a\| + 1)\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Continuidad de las operaciones lineales, en términos de sucesiones

Corolario

Sea V un espacio normado. Supongamos que

$$(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}, \qquad (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}, \qquad (\eta_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},$$

$a, b \in V$, $\xi \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{k\to\infty} u_k = a, \qquad \lim_{k\to\infty} v_k = b, \qquad \lim_{k\to\infty} \eta_k = \xi.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} (u_k + v_k) = a + b, \qquad \lim_{k\to\infty} (\eta_k u_k) = \xi a.$$

Los desplazamientos son homeomorfismos

Proposición

Sea V un espacio normado y sea $a \in V$. Definimos

$$T_a\colon V \to V, \qquad T_a(x) := x + a.$$

Entonces T_a es un homeomorfismo.

Ejercicio: demostrar la proposición.

Las dilataciones son homeomorfismos

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definimos

$$S_\lambda \colon V \to V, \qquad S_\lambda(x) := \lambda\, x.$$

Entonces S_λ es un homeomorfismo.

Ejercicio: demostrar la proposición.

Continuidad de la norma

Proposición

Sea V un espacio normado complejo. Entonces la función $\|\cdot\|$ es continua.

Continuidad de la norma

Proposición

Sea V un espacio normado complejo. Entonces la función $\|\cdot\|$ es continua.

Demostración.

Continuidad de la norma

Proposición

Sea V un espacio normado complejo. Entonces la función $\|\cdot\|$ es continua.

Demostración.

Recordamos la desigualdad inversa del triángulo para la norma:

$$\Big|\,\|u\| - \|v\|\,\Big| \;\leq\; \|u - v\|.$$

Continuidad de la norma

Proposición

Sea V un espacio normado complejo. Entonces la función $\|\cdot\|$ es continua.

Demostración.

Recordamos la desigualdad inversa del triángulo para la norma:

$$\Big| \|u\| - \|v\| \Big| \leq \|u - v\|.$$

Esta desigualdad implica que $\|\cdot\|$ es Lipschitz continua.

Continuidad de la norma, en términos de sucesiones

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo, sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ y sea $v \in V$.
Supongamos que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = v.$$

Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|v\|.$$