Contrucción de espacios normados a partir de espacios vectoriales con normas extendidas (un tema de la unidad “Espacios normados”)

Egor Maximenko
https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

20 de septiembre de 2022

Objetivos:

- introducir el concepto de norma extendida $N\colon V \to [0, +\infty]$;
- mostrar que $\{v \in V\colon\ N(v) < +\infty\}$ es un espacio normado.

Objetivos:

- introducir el concepto de norma extendida $N\colon V \to [0, +\infty]$;
- mostrar que $\{v \in V\colon\ N(v) < +\infty\}$ es un espacio normado.

Prerrequisitos:

- normas y espacios normados;
- subespacios de espacios vectoriales;
- operaciones en $[-\infty, +\infty]$.

Norma extendida

A diferencia de una norma, una norma extendida puede tomar el valor $+\infty$.

Norma extendida

Definición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0, +\infty]$.

Decimos que N es una norma extendida, si se cumplen las siguientes propiedades.

N1. La propiedad subaditiva: para cualesquiera a, b en V,

$$N(a + b) \leq N(a) + N(b).$$

N2. La propiedad homogénea absoluta: para cualesquiera a en V y λ en $\mathbb{C}$,

$$N(\lambda a) = |\lambda| N(a).$$

N3. Para cada a en $V \setminus \{0_V\}$ se tiene que $N(a) > 0$.

La norma extendida del vector cero

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0, +\infty]$ una norma extendida en V. Entonces $N(0_V) = 0$.

La norma extendida del vector cero

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0, +\infty]$ una norma extendida en V. Entonces $N(0_V) = 0$.

Demostración.

Usamos propiedades de multiplicación por escalares ne espacios vectoriales y la propiedad absolutamente homogénea N2:

$$N(0_V) = N(0\,0_V) = 0\,N(0_V) = 0.$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0,+\infty]$ una norma extendida en V. Pongamos

$$W := \left\{ v \in V\colon\ N(v) < +\infty \right\}.$$

Entonces W es un subespacio vectorial de V. La función $N|_W$ es una norma en W.

Demostración, inicio

1. Ya sabemos que $N(0_V) = 0$. Luego $0_V \in W$.

Demostración, inicio

1. Ya sabemos que $N(0_V) = 0$. Luego $0_V \in W$.
2. Sean $a, b \in W$. Entonces, por la propiedad N1,

$$N(a + b) \leq N(a) + N(b) < +\infty.$$

Hemos mostrado que $a + b \in W$.

Demostración, inicio

1. Ya sabemos que $N(0_V) = 0$. Luego $0_V \in W$.
2. Sean $a, b \in W$. Entonces, por la propiedad N1,

$$N(a + b) \leq N(a) + N(b) < +\infty.$$

Hemos mostrado que $a + b \in W$.

3. Sean $a \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, por la propiedad N2,

$$N(\lambda a) = |\lambda|\, N(a) < +\infty.$$

Luego $\lambda a \in W$.

Demostración, final

4. Hemos mostrado que W es un subespacio vectorial de V.

Demostración, final

4. Hemos mostrado que W es un subespacio vectorial de V.

5. Las propiedades N1, N2, N3 de N involucran solamente el cuantificador $\forall$.

Demostración, final

4. Hemos mostrado que W es un subespacio vectorial de V.

5. Las propiedades N1, N2, N3 de N involucran solamente el cuantificador $\forall$.

Por lo tanto, estas propiedades se cumplen para todos los vectores en W:

$$\begin{aligned}
&\forall a, b \in W && N(a+b) \le N(a) + N(b), \\
&\forall a \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} && N(\lambda a) = |\lambda|\, N(a), \\
&\forall a \in W && \big(a \neq 0_V \quad \Rightarrow \quad N(a) > 0\big).
\end{aligned}$$

Demostración, final

4. Hemos mostrado que W es un subespacio vectorial de V.

5. Las propiedades N1, N2, N3 de N involucran solamente el cuantificador $\forall$.

Por lo tanto, estas propiedades se cumplen para todos los vectores en W:

$$\begin{aligned}
&\forall a, b \in W && N(a+b) \le N(a) + N(b),\\
&\forall a \in W \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} && N(\lambda a) = |\lambda|\, N(a),\\
&\forall a \in W && \big(a \ne 0_V \quad \Rightarrow \quad N(a) > 0\big).
\end{aligned}$$

En otras palabras, la función restringida $N|_W$ también tiene las propiedades N1, N2, N3.