Contrucción de espacios normados a partir de espacios vectoriales con normas extendidas

Objetivos. Introducir el concepto de norma extendida (que puede tomar el valor $+\infty$). Mostrar que los vectores, en los cuales la norma extendida es finita, forman un espacio normado.

Prerrequisitos. Espacios normados.

A diferencia de una norma, una norma extendida puede tomar el valor $+\infty$. En lo demás, es un concepto muy similar.

1 Definición (norma extendida)**.** Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0,+\infty]$. Decimos que N es una *norma extendida*, si se cumplen las siguientes propiedades.

N1. La propiedad subaditiva: para cualesquiera a, b en V,

$$N(a+b) \le N(a) + N(b).$$

N2. La propiedad homogénea absoluta: para cualesquiera a en V y λ en $\mathbb{C}$,

$$N(\lambda a) = |\lambda| N(a).$$

N3. Para cada a en $V \setminus \{0_V\}$ se tiene que $N(a) > 0$.

2 Observación (la norma extendida del vector cero es cero)**.** La condición N2 y propiedades de la multiplicación por escalares en un espacio vectorial implican que

$$N(0_V) = N(0\, 0_V) = 0\, N(0_V) = 0.$$

3 Proposición. *Sea V un espacio vectorial complejo y sea $N\colon V \to [0,+\infty]$ una norma extendida en V. Pongamos*

$$W := \big\{ v \in V\colon\ N(v) < +\infty \big\}.$$

Entonces W es un subespacio vectorial de V. La función $N|_W$ es una norma en W.

Demostración. 1. La condición N2 y propiedades de la multiplicación por escalares en un espacio vectorial implican que

$$N(0_V) = N(0\,0_V) = 0\,N(0_V) = 0.$$

Por lo tanto, $0_V \in W$.

2. Sean $a, b \in W$. Entonces, por la propiedad N1,

$$N(a+b) \le N(a) + N(b) < +\infty,$$

así que $a + b \in W$.

3. Sean $a \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces, por la propiedad N2,

$$N(\lambda a) = |\lambda| N(a) < +\infty,$$

así que $\lambda a \in W$.

4. Hemos mostrado que W es un subespacio vectorial de V.

5. Las propiedades N1, N2, N3 involucran solamente el cuantificador $\forall$, por eso la función restringida $N|_W$ también tiene estas propiedades. $\square$