Espacios métricos conexos

1 Definición. Sea X un espacio métrico. Se dice que X es *disconexo* si existe un conjunto $A \subsetneq X$ tal que $A \neq \varnothing$, A es abierto y cerrado. Se dice que X es conexo si X no es disconexo.

2 Definición (partición como familia)**.** Sea X un conjunto. Una familia de conjutos $(A_j)_{j \in J}$ se llama *partición* de X si cumple con las siguientes propiedades:

(i) $\bigcup_{j \in J} A_j = X$,

(ii) para cada j, k en J, si $j \neq k$, entonces $A_j \cap A_k = \varnothing$,

(iii) para cada j en J, $A_j \neq \varnothing$.

3 Definición (partición como colección de conjuntos)**.** Sea X un conjunto. Una colección de conjuntos $\mathcal{A}$ se llama *partición* de X si cumple con las siguientes propiedades:

(i) $\cup \mathcal{A} = X$,

(ii) para cada U, V en $\mathcal{A}$, si $U \neq V$, entonces $U \cap V = \varnothing$,

(iii) $\varnothing \notin \mathcal{A}$.

4 Proposición. *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X es conexo;

(b) no existe una partición de X en dos conjuntos abiertos;

(c) no existe una partición de X en dos conjuntos cerrados.

5 Definición. Sea X un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Se dice que A es un conjunto conexo si A, considerado como subespacio del espacio métrico X, es conexo.

6 Proposición. *Sea X un espacio métrico y sea $A \subseteq X$. Entonces A es conexo si, y solo si, no existen U, V en τ_X tales que*

$$U \cap A \neq \varnothing, \quad V \cap A \neq \varnothing, \quad U \cap V \cap A \neq \varnothing, \quad (U \cup V) \cap A = A.$$

7 Ejemplo. Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ no son conexos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1] \cup [4,5]$.

8 Ejercicio. Encontrar todos los conjuntos conexos en un espacio métrico discreto.

Luego vamos a demostrar que los intervalos de $\mathbb{R}$ son conjuntos conexos, y cada subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo.

9 Proposición. *Sean X, Y espacios métricos y sea $f \in C(X, Y)$. Denotemos por g a la función que se obtiene de f al restringir el codominio a $f[X]$. Entonces $g \in C(X, f[X])$.*

10 Proposición. *Sean X, Y espacios métricos, y sea $f \in C(X, Y)$. Supongamos que X es conexo. Entonces $f[X]$ es un conjunto conexo en Y.*

Demostración. Gracias a la Proposición 9, es suficiente considerar el caso cuando f es suprayectiva.

Supongamos que Y no es conexo. Sean P y Q subconjuntos abiertos de Y tales que $P \neq \varnothing$, $Q \neq \varnothing$, $Y = P \cup Q$, $P \cap Q = \varnothing$. Pongamos

$$A \coloneqq f^{-1}[P], \qquad B \coloneqq f^{-1}[Q].$$

Entonces A y B son abiertos, $A \cup B = X$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $A \cap B = \varnothing$. Esto significa que X es disconexo, lo cual contradice a la suposición. $\square$