Completación de espacios métricos

Objetivos. Mostrar que cada espacio métrico tiene una completación. Más aún, esta completación es única, salvo isometrías.

Prerrequisitos. Sucesiones de Cauchy, espacios métricos completos, extensión de una función uniformemente continua, definida en un subconjunto denso de un espacio métrico.

1 Definición. Sean (X, d) y (Y, ρ) espacios métricos. Se dice que (Y, ρ) es una *completación* de (X, d) si (Y, ρ) es completo y existe una función isométrica $f\colon X \to Y$ tal que $f[X]$ es un subconjunto denso de Y.

Es bastante fácil demostrar que la completación es esencialmente única.

2 Proposición (sobre la unicidad de la completación de espacios métricos, salvo biyecciones isométricas)**.** *Sea X un espacio métrico y sean Y, Z completaciones de X. Entonces existe una función biyectiva isométrica $h\colon Y \to Z$.*

Idea de la demostración. Usar el teorema sobre la extensión de una función uniformemente continua, definida en un subconjunto denso del dominio. □

Para construir una completación de un espacio dado, necesitamos varias herramientas auxiliares.

3 Definición (el medidor de Cauchy de una sucesión, repaso)**.** Dada una sucesión $a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en (X, d), pongamos

$$\gamma_a(n) \coloneqq \sup_{j,k\geq n} d(a_j, a_k) = \operatorname{diam}(\{a_j\colon\ j \geq n\}).$$

4 Proposición (criterio de sucesión de Cauchy en términos del medidor de Cauchy, repaso)**.** *$(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si, y sólo si, $\gamma_a(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

5 Lema. *Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de Cauchy. Entonces $(d(a_k, b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Denotemos $d(a_k, b_k)$ por δ_k. Si $m \in \mathbb{N}$ y $j, k \geq m$, entonces

$$|\delta_j - \delta_k| \leq |d(a_j, b_j) - d(a_k, b_k)| \leq d(a_j, a_k) + d(b_j, b_k) \leq \gamma_a(m) + \gamma_b(m).$$

De aquí obtenemos una cota superior para el medidor de Cauchy de la sucesión $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\gamma_\delta(m) \leq \gamma_a(m) + \gamma_b(m).$$

Como $\lim\limits_{m\to\infty} \gamma_a(m) = 0$ y $\lim\limits_{m\to\infty} \gamma_b(m) = 0$, concluimos que $\lim\limits_{m\to\infty} \gamma_\delta(m) = 0$. □

6 Lema (sobre la pseudométrica natural entre sucesiones de Cauchy). *Sea X un espacio métrico. Denotemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de las sucesiones de Cauchy en X. Definimos $\sigma\colon \mathcal{C}^2 \to [0, +\infty)$ mediante la siguiente regla:*

$$\sigma(a, b) := \lim_{k\to\infty} d(a_k, b_k).$$

Entonces σ es una pseudométrica en $\mathcal{C}$.

Demostración. Sean $a, b, c \in \mathcal{C}$. Entonces para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos

$$d(a_k, b_k) \le d(a_k, c_k) + d(c_k, b_k).$$

Sabemos que las sucesiones $(d(a_k, b_k))_{k\in\mathbb{N}}$, $(d(a_k, c_k))_{k\in\mathbb{N}}$ y $(d(c_k, b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ convergen. Pasando al límite en la desigualdad, obtenemos

$$\sigma(a, b) \le \sigma(a, c) + \sigma(c, b).$$

También es fácil verificar que $\sigma(a, b) = \sigma(b, a)$ y que $\sigma(a, a) = 0$. □

7 Lema (sobre la distancia entre sucesiones constantes). *Sea X un espacio métrico. Definimos $h\colon X \to \mathcal{C}$ mediante la regla*

$$h(x)_j = x \qquad (j \in \mathbb{N}).$$

En otras palabras, $h(x)$ es la sucesión constante con todas las componentes iguales a x:

$$h(x) = (x, x, x, \ldots).$$

Entonces h es una función isométrica, esto es,

$$\sigma(h(x), h(y)) = d(x, y) \qquad (x, y \in X).$$

Demostración. Primero notemos que si $x \in X$, entonces la sucesión constante $h(x)$ converge al punto x y por eso pertenece al conjunto $\mathcal{C}$. Si $x, y \in X$, entonces para cada k en $\mathbb{N}$ tenemos que $h(x)_k = x$, $h(y)_k = y$, luego

$$\sigma(h(x), h(y)) = \lim_{k\to\infty} d(h(x)_k, h(y)_k) = d(x, y).$$ □

El siguiente lema contiene la idea más fuerte de este tema.

8 Lema (“sobre la convergencia de una sucesión de Cauchy a si misma”). *Sea X un espacio métrico y sea $a \in \mathcal{C}$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(h(a_n), a) = 0.$$

Demostración. Para cada n en $\mathbb{N}$ y cada k en $\mathbb{N}$ con $k \ge n$,

$$d(h(a_n)_k, a_k) = d(a_n, a_k) \le \gamma_a(n).$$

Por eso

$$\sigma(h(a_n), a) = \lim_{k\to\infty} d(h(a_n)_k, a_k) \le \gamma_a(n).$$

Como a es de Cauchy, la última expresión tiende a 0 cuando n tiende a infinito. □

9 Teorema (sobre la existencia de una completación de un espacio métrico)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces existe un espacio métrico completo Y y una función isométrica $f\colon X \to Y$ tal que $f[X]$ es denso en Y.*

Demostración. Usamos la notación de los lemas. Ya sabemos que $(\mathcal{C}, \sigma)$ es un espacio pseudométrico. Como vimos en el tema "Espacios pseudométricos", hay una receta simple para pasar de un espacio pseudométrico a un espacio métrico. Apliquemos esta receta al espacio pseudométrico $(\mathcal{C}, \sigma)$. Definamos una relación binaria en $\mathcal{C}$:

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \sigma(a, b) = 0.$$

Entonces $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$. Denotemos por Y al conjunto de las clases de equivalencia y por $g\colon \mathcal{C} \to Y$ a la función que convierte cada sucesión de Cauchy a en su clase de equivalencia:

$$g(a) \coloneqq \{b \in \mathcal{C}\colon\ \sigma(a, b) = 0\}.$$

Definimos $\rho\colon Y^2 \to [0, +\infty)$ como

$$\rho(g(a), g(b)) \coloneqq \sigma(a, b).$$

Como vimos en el tema "Espacios pseudométricos", esta definición es consistente, y ρ es una métrica.

Pongamos $f \coloneqq g \circ h$. Del Lema 7 se sigue que f es una isometría. En efecto, si $x, y \in X$, entonces

$$\rho(f(x), f(y)) = \sigma(h(x), h(y)) = d(x, y).$$

Notamos que si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = g(a).$$

En efecto, por el Lema 8,

$$\rho(f(a_n), g(a)) = \sigma(h(a_n), a) = 0.$$

Demostremos que $f[X]$ es denso en Y. Sea $A \in Y$. Elegimos $a \in A$. Para cada n en $\mathbb{N}$ pongamos $B_n \coloneqq f(a_n)$. Entonces, por el inciso anterior, $\lim_{n\to\infty} B_n = A$. Como $B_n \in f[X]$ para cada n en $\mathbb{N}$, concluimos que $A \in \operatorname{cl}(f[X])$.

Demostremos que (Y, ρ) es completo. Sea $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y. Usando la densidad de $f[X]$ en Y, para cada k en $\mathbb{N}$ encontramos b_k en X tal que $\rho(f(b_k), A_k) < 1/k$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $j, k \geq n$, entonces

$$\begin{aligned}\rho(b_j, b_k) = \rho(f(b_j), f(b_k)) &\leq \rho(f(b_j), A_j) + \rho(A_j, A_k) + \rho(A_k, f(b_k))\\ &\leq \frac{1}{j} + \gamma_A(n) + \frac{1}{k} \leq \gamma_A(n) + \frac{2}{n},\end{aligned}$$

luego $\gamma_b(n) \leq \gamma_A(n) + \frac{1}{n}$, y la sucesión b es de Cauchy. Mostremos que $\lim_{n\to\infty} A_n = g(b)$. Como ya sabemos, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = g(b)$. Pero

$$\rho(A_n, g(b)) \leq \rho(A_n, f(b_n)) + \rho(f(b_n), g(a)) \leq \frac{1}{n} + \rho(f(b_n), g(a)),$$

así que $\lim_{n\to\infty} A_n = g(b)$. $\square$