Completez de espacios normados y convergencia absoluta de series

Objetivos. Demostrar el criterio de completez para espacios normados, en términos de series convergentes.

Prerrequisitos. Sucesiones de Cauchy, sucesiones regulares de Cauchy, espacios métricos completos, criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones regulares de Cauchy.

Aplicaciones. Completez de cocientes de espacios normados, completez de los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ y $L^p(X, \mu)$.

1 Definición (sucesión regular de Cauchy, repaso)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que x es una *sucesión regular de Cauchy* si para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$d(x_{n+1}, x_n) < 2^{-n-1}.$$

2 Proposición (criterio de completez de un espacio métrico, en términos de sucesiones regulares de Cauchy, repaso)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) X es completo, esto es, cada sucesión de Cauchy en X es convergente.

(b) Cada sucesión regular de Cauchy en X es convergente.

3 Definición (espacio de Banach)**.** Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo.

4 Definición (convergencia de series en un espacio normado)**.** Sea V un espacio normado, sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ y sea $y \in V$. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge al vector y y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y,$$

si la sucesión de las sumas parciales $\left(\sum_{n=1}^{k} x_n\right)_{k=1}^{\infty}$ converge al vector y, esto es,

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{k} x_n - y \right\| = 0.$$

5 Proposición (criterio de completez para espacios normados)**.** *Sea V un espacio normado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) V es completo.

(b) Para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en V, si la serie numérica $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge, entonces la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge.

Demostración. (a)⇒(b). Esta parte a veces se llama el *teorema de Weierstrass de la convergencia absoluta*. Supongamos que V es completo. Sea $x \in V^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty. \tag{1}$$

Para cada k en $\mathbb{N}$ denotemos por s_k a la k-ésima suma parcial de la serie dada, y por t_k la k-ésima suma parcial de la serie formada por las normas:

$$s_k \coloneqq \sum_{n=1}^{k} x_n, \qquad t_k \coloneqq \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Usando la condición (1) encontramos un m en $\mathbb{N}$ tal que para cada p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \geq m$ se cumple

$$|t_p - t_q| < \varepsilon.$$

Entonces para cada $p, q \geq m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|s_q - s_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| = t_q - t_p < \varepsilon.$$

Hemos mostrado que la sucesión s es de Cauchy. Luego, por la suposición (a), esta sucesión tiene un límite y. Por la definición de la convergencia de series, esto significa que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = y$.

(b)⇒(a). Supongamos que se cumple la condición (b). Tenemos por demostrar que V es completo. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy. Formamos las diferencias sucesivas de sus elementos:

$$u_1 \coloneqq x_1, \qquad u_k \coloneqq x_k - x_{k-1} \quad (k \geq 1).$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|u_k\| = \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} \|x_k - x_{k-1}\| < \|x_1\| + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} < +\infty.$$

Por la hipótesis (b), la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge. Pero las sumas parciales de esta serie forman la sucesión original $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = x_1 + \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n. \qquad \square$$