Completez de espacios métricos (repaso)

Objetivos. Repasar los conceptos de sucesión de Cauchy y sucesión regular de Cauchy. Demostrar el criterio de completez para espacios métricos, en términos de sucesiones regulares de Cauchy.

Prerrequisitos. Sucesiones de Cauchy, sucesiones regulares de Cauchy, espacios métricos completos.

Aplicaciones. Completez de los espacios normados, completez de los espacios $\ell^p(\mathbb{N})$ y $L^p(X, \mu)$.

Definición de completez de espacios métricos, repaso

1 Definición (sucesión de Cauchy)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. ¿Cuándo se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy? Recordar la definición. Otras frases equivalentes: sucesión fundamental, sucesión convergente en si.

2 Proposición (cada sucesión convergente es de Cauchy)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Supongamos que $y \in X$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = y$. Entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.*

Idea de demostración. Usar la desigualdad del triángulo:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, y) + d(y, x_n).$$ □

3 Definición (espacio métrico completo)**.** Un espacio métrico (X, d) se llama *completo* si cada sucesión de Cauchy en este espacio tiene un límite.

4 Proposición (cada sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente es convergente)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una sucesión estrictamente creciente, $y \in X$. Supongamos que*

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy,*

- $\lim\limits_{k\to\infty} x_{\nu(k)} = y$.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$.

Idea de demostración. Usar la desigualdad del triángulo

$$d(x_n, y) \le d(x_n, x_{\nu(k)}) + d(x_{\nu(k)}, y).$$

Explicar bien la lógica: a partir de un número $\varepsilon > 0$ dado, construir ciertos índices. $\square$

Criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones regulares de Cauchy, repaso

5 Definición (sucesión regular de Cauchy)**.** Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión regular de Cauchy* si para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$d(x_{n+1}, x_n) < 2^{-n-1}.$$

6 Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en X. Entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X.*

Idea de demostración. Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m \ge n$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le \sum_{q=n}^{m-1} d(x_q, x_{q+1}) < \sum_{q=n}^{m-1} 2^{-q-1} \\ &= 2^{-n-1} \sum_{p=0}^{m-n-1} 2^{-p} = 2^{-n-1} \frac{1 - 2^{-(m-n)}}{1 - \frac{1}{2}} < 2^{-n}. \end{aligned}$$ $\square$

7 Proposición (en cada sucesión de Cauchy se puede elegir una subsucesión regular de Cauchy)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces existe una función estrictamente creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad*

$$d(x_{\nu(k+1)}, x_{\nu(k)}) < 2^{-k-1}. \tag{1}$$

Idea de demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$, utilizamos la suposición que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y encontramos p_k en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m, n \geq p_k \qquad d(x_m, x_n) < 2^{-k-1}. \tag{2}$$

Construimos $(\nu(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de manera inductiva:

$$\nu(1) \coloneqq p_1, \qquad \nu(k+1) \coloneqq \text{máx}\{\nu(k)+1, p_{k+1}\}.$$

Esta construcción garantiza que $\nu(k+1) > \nu(k)$ para cada k en $\mathbb{N}$, así que ν es estrictamente creciente. Para obtener (1), notamos que $\nu(k+1) > \nu(k) \geq p_k$ y aplicamos (2) con $m = k+1$ y $n = k$. □

8 Proposición (criterio de completez de un espacio métrico, en términos de sucesiones regulares de Cauchy)**.** *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) X es completo, esto es, cada sucesión de Cauchy en X es convergente.

(b) Cada sucesión regular de Cauchy en X es convergente.

Demostración. Demostrar la proposición usando algunos de los resultados anteriores. □