Completitud de espacios métricos y normados (repaso)

Objetivos. Repasar los conceptos de espacio métrico completo, sucesión de Cauchy y sucesión regular de Cauchy. Demostrar el criterio de completitud para espacios normados (en términos de series convergentes).

Requisitos. Sucesiones de Cauchy, espacios completos, teorema de la convergencia dominada.

Completitud de un espacio métrico

Definición (sucesión de Cauchy). Recuerde la definición de la sucesión de Cauchy.

1. Toda sucesión convergente es de Cauchy. Sea (M, ρ) un espacio métrico, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M y sea b un punto en M tales que $x_n \to b$, esto es, $\rho(x_n, b) \to 0$. Demuestre que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

2. Sucesión de Cauchy con una subsucesión convergente. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (M, ρ). Sea $(x_{\nu(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de la sucesión original que converge a un punto b, esto es,

$$\lim_{k\to\infty} x_{\nu(k)} = b.$$

Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

Definición (espacio métrido completo). Un espacio métrico (M, ρ) se llama *completo* si toda sucesión de Cauchy en este espacio tiene un límite.

3. Ejemplo de un espacio métrico no completo. Dé un ejemplo de un espacio métrico no completo.

Sucesiones regulares de Cauchy

Definición (sucesión regular de Cauchy). Sea (M, ρ) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en este espacio. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión regular de Cauchy* si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 2^{-n-1}.$$

4. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en un espacio métrico (M, ρ). Demuestre que para todo par de índices $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ se cumple la desigualdad

$$|x_m - x_n| \leq 2^{-n}.$$

Deduzca de aquí que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

5. Criterio de la completitud de un espacio métrico. Sea (M, ρ) un espacio métrico. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (M, ρ) es completo, esto es, toda sucesión de Cauchy en M es convergente.

(b) Toda sucesión regular de Cauchy en M es convergente.

Criterio de completitud para espacios normados

6. Definición (espacio de Banach). Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo.

7. Teorema (criterio de completitud para espacios normados). Sea $(M, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(M, \|\cdot\|)$ es completo.

(b) Para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en M, si la serie numérica $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge, entonces la serie $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge.

Idea de demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Esta parte a veces se llama el *teorema de Weierstrass de la convergencia absoluta*. Suponemos que $(M, \|\rho\|)$ es completo y consideramos una serie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty. \tag{1}$$

Demostraremos que la sucesión $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de las sumas parciales

$$S_k \coloneqq \sum_{n\le k} x_k$$

es de Cauchy, luego de la hipótesis (a) se obtendrá que esta sucesión es convergente. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la condición (1) encontramos un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| - \sum_{n<m} \|x_n\| < \varepsilon,$$

esto es,

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon.$$

Entonces para todo $p, q \ge m$ con $p < q$ tenemos que

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} x_n \right\| \le \sum_{n=p+1}^{q} \|x_n\| \le \sum_{n=m}^{\infty} \|x_n\| < \varepsilon.$$

(b)⇒(a). Suponemos que se cumple la condición (b) y tenemos por demostrar que $(M, \|\cdot\|)$ es completo. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy. Formamos las diferencias sucesivas:

$$d_0 \coloneqq x_0, \qquad d_k \coloneqq x_k - x_{k-1}.$$

Entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \|d_k\| \le \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-k-1} < +\infty,$$

y por la hipótesis (b) la serie $\sum_{k\in\mathbb{N}} d_k$ converge. Pero las sumas parciales de esta serie forman la sucesión original $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\sum_{k=0}^{n} d_k = d_0 + \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = x_n. \qquad \square$$