# Completitud de los espacios $L^p$

**Objetivos.** Demostrar que los espacios $L^p$ con $p \in [1, +\infty]$ son completos.

**Requisitos.** Sucesiones de Cauchy, sucesiones regulares de Cauchy, espacios métricos completos, criterio de completitud de espacios métricos en términos de sucesiones regulares de Cauchy, criterio de completitud de espacios normados en términos de la convergencia de series, teorema de convergencia monótona, lema de Fatou, teorema de convergencia dominada, definición de los espacios $L^p$.

## Criterios de completez de espacios métricos y normados (repaso)

**1. Criterio de completitud para espacios métricos, en térmios de sucesiones regulares de Cauchy (repaso).** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(X, d)$ es completo;

(b) cualquier sucesión regular de Cauchy en $(X, d)$ converge.

**2. Criterio de completitud para espacios normados (repaso).** Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $(V, \|\cdot\|)$ es completo;

(b) para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $V$, si la serie numérica $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$ converge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge.

## Completitud de los espacios $L^p$

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. En vez de $L^p(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ escribimos simplemente $L^p(X, \mu)$ o $L^p$. Denotamos por $\mathcal{Z}(X, \mu)$ o simplemente por $\mathcal{Z}$ al siguiente conjunto de funciones:

$$\mathcal{Z} := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) : \quad f = 0 \quad \mu\text{-c.t.p.}\}.$$

Recordemos que $L^p$ se define como el espacio cociente (espacio de clase de equivalencia) del espacio $\mathcal{L}^p$ sobre su subespacio $\mathcal{Z}$.

**3. Teorema.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio $L^\infty(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ es completo.

*Demostración.* Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión regular de Cauchy en $L^\infty$. Para cada $n$ elegimos $f_n$ en $F_n$. Entonces

$$\operatorname*{ess\,sup}_{X,\mu} |f_n - f_{n+1}| = \|F_n - F_{n+1}\|_\infty \leq 2^{-n-1}.$$

Pongamos

$$L_n \coloneqq \{x \in X\colon\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \geq 2^{-n}\}, \qquad M \coloneqq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n, \qquad B \coloneqq X \setminus M.$$

Entonces $\mu(M) = 0$, y para cada $x$ en $B$ y cada $n$ en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq 2^{-n-1}.$$

Para cada $x$ en $B$ la sucesión numérica $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por lo tanto converge a un número, al cual denotamos por $g(x)$. Además ponemos $g(x) = 0$ para $x$ en $M$.

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \in B; \\ 0, & x \in M. \end{cases}$$

Notamos que para cada $x$ en $B$ y cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ se cumple la desigualdad

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq 2^{-n}.$$

Pasando al límite cuando $m \to \infty$ obtenemos

$$|f_n(x) - g(x)| \leq 2^{-n}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{N}_\infty(f_n - g) \leq 2^{-n}.$$

Esto implica que $\mathcal{N}_\infty(g) \leq \mathcal{N}_\infty(f_1) + 1/2$. Pongamos $G \coloneqq g + \mathcal{Z}$. Entonces $G \in L^\infty$ y $\|G - F_n\| \leq 2^{-n}$. □

Vamos a demostrar la completez de $L^p$ para $1 \leq p < +\infty$. Empecemos con el caso $p = 1$, cuando la demostración es un poco más fácil.

**4. Teorema.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Entonces el espacio $L^1(X, \mu)$ es completo.

*Demostración.* Primera parte. Usando el criterio de completitud de espacios normados, consideremos una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $L^1(X,\mu)$ tal que

$$C \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \|F_n\|_1 < +\infty.$$

Para cada $n$ en $\mathbb{N}$ elegimos $f_n$ en $F_n$. Definimos las funciones $g_k\colon X \to [0,+\infty]$ y $h\colon X \to [0,+\infty]$ por medio de las siguientes fórmulas:

$$u_k(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{k} |f_n(x)|, \qquad v(x) \coloneqq \lim_{k\to\infty} g_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Notamos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente cuyo límite puntual es $h$. Aplicamos el teorema de la convergencia monótona y la propiedad subaditiva de la seminorma $\mathcal{N}_1$:

$$\int_X v\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X u_k\,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_1(u_k) \le \lim_{k\to+\infty} \left( \sum_{n=1}^{k} \mathcal{N}_1(f_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \|F_n\|_1 = C.$$

De aquí concluimos que $\mathcal{N}_1(v) \le C$. Denotemos por $B$ al conjunto de los puntos en los cuales $v$ toma valores finitos:

$$B \coloneqq \{x \in X\colon\ v(x) < +\infty\}.$$

Entonces $\mu(X \setminus B) = 0$ y la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge para todo $x$ en $B$. Denotemos por $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de las sumas parciales:

$$g_k(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Pongamos

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), & x \in B; \\ 0, & x \in X \setminus B. \end{cases}$$

Segunda parte. Vamos a demostrar que $\mathcal{N}_1(g_k - u) \to 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos un $m$ tal que

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|F_n\|_1 < \varepsilon.$$

Aplicamos el Lema de Fatou a la sucesión $g_k - g_m$, considerando $m$ como un parámetro fijo:

$$\int_B \liminf_{k\to\infty} |g_k - g_m|\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int_B |g_k - g_m|\,\mathrm{d}\mu.$$

Escribimos esta fórmula en otros términos y aplicamos la propiedad subaditiva de $\mathbb{N}_1$:

$$\mathcal{N}_1(h - g_m) \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{N}_1\left(\sum_{n=m+1}^{k} f_k\right) \le \liminf_{k\to\infty}\left(\sum_{n=m+1}^{k} \mathcal{N}_1(f_k)\right) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \mathcal{N}_1(f_k) < \varepsilon.$$

Hemos demostrado que $\mathcal{N}_1(g_m - h) \to 0$. En particular, esto implica que $\mathcal{N}_1(h) < +\infty$. Pongamos $G_m \coloneqq g_m + \mathcal{Z}$, $H \coloneqq h + \mathcal{Z}$. Entonces $\|G_m - h\|_1 = \mathcal{N}_1(g_m - h) \to 0$ cuando $m \to \infty$, esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} F_n = H$. $\square$

La demostración en el caso $1 < p < +\infty$ es casi la misma que en el caso $p = 1$, pero en algunos pasos hay que aplicar la desigualdad de Minkowski.

**5. Teorema.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Entonces el espacio $L^p(X, \mu)$ es completo.

*Demostración.* Primera parte. Usando el criterio de completitud de espacios normados, consideremos una sucesión $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}^{\infty}$ en $L^p(X, \mu)$ tal que

$$C \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \|F_n\|_p < +\infty.$$

Para cada $n$ en $\mathbb{N}$ elegimos $f_n$ en $F_n$. Definimos las funciones $u_k \colon X \to [0, +\infty]$ y $v \colon X \to [0, +\infty]$ por medio de las siguientes fórmulas:

$$u_k(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{k} |f_n(x)|, \qquad v(x) \coloneqq \lim_{k\to\infty} g_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Notamos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente cuyo límite puntual es $v$. Luego $(u_k^p)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente cuyo límite puntual es $v^p$. Aplicamos el teorema de la convergencia monótona y la desigualdad de Minkowski:

$$\int\limits_X v^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X u_k^p \, \mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_p(u_k)^p \le \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} \mathcal{N}_p(f_n)\right)^p = C^p.$$

De aquí concluimos que $\mathcal{N}_p(h) \le C$. Denotemos por $B$ al conjunto de los puntos en los cuales $v$ toma valores finitos:

$$B \coloneqq \{x \in X \colon\ v(x) < +\infty\}.$$

Entonces $\mu(X \setminus B) = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para todo $x$ en $B$. Denotemos por $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de las sumas parciales:

$$g_k(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{k} f_n(x).$$

Pongamos

$$h(x) := \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x), & x \in B; \\ 0, & x \in X \setminus B. \end{cases}$$

Segunda parte. Vamos a demostrar que $\mathcal{N}_p(g_k - h) \to 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos un $m$ tal que

$$\sum_{n=m}^{\infty} \|F_n\|_p < \varepsilon.$$

Aplicamos el lema de Fatou a la sucesión $g_k - g_m$, considerando $m$ como un parámetro fijo:

$$\int\limits_B \liminf_{k\to\infty} |g_k - g_m|^p \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{k\to\infty} \int\limits_B |g_k - g_m|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

Escribimos esta fórmula en otros términos y aplicamos la desigualdad de Minkowski:

$$\mathcal{N}_p(h - g_m)^p \le \liminf_{k\to\infty} \mathcal{N}_p \left( \sum_{n=m+1}^{k} f_k \right)^p \le \liminf_{k\to\infty} \left( \sum_{n=m+1}^{k} \mathcal{N}_p(f_k) \right)^p < \varepsilon^p.$$

Hemos demostrado que $\mathcal{N}_p(g_m - h) \to 0$. En particular, esto implica que $\mathcal{N}_p(h) < +\infty$. Pongamos $G_m := g_m + \mathcal{Z}$, $H := h + \mathcal{Z}$. Entonces $\|G_m - H\|_p = \mathcal{N}_p(s_m - u) \to 0$ cuando $m \to \infty$, esto es, $\sum_{n=1}^{\infty} F_n = H$. □

**6. Corolario.** Dada una sucesión convergente en $L^p$, existe una subsucesión que converge en casi todas partes.

**7. La convergencia en $L^p$ implica la convergencia en medida.** Muestre que si $\mathcal{N}_p(f_n - g) \to 0$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} g$.

**8. Ejercicio.**

- Construya un ejemplo tal que $f_n \xrightarrow{\mu} g$, pero $\mathcal{N}_p(f_n - g) \not\to 0$.
- Construya un ejemplo tal que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$, pero $\mathcal{N}_p(f_n - g) \not\to 0$.
- Construya un ejemplo tal que $\mathcal{N}_p(f_n - g) \to 0$, pero $f_n$ no converge a $g$ en medida.

**9. Teorema (densidad de funciones simples en $L^p$).** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1, +\infty)$. Denotemos por $\mathcal{S}$ al siguiente conjunto de funciones:

$$\mathcal{S} \coloneqq \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}): \quad \mu(\{x \in X: \ f(x) \neq 0\}) < +\infty\}.$$

Sea $\widetilde{\mathcal{S}}$ el conjunto de las clases de equivalencia de funciones que pertenecen a $\mathcal{S}$:

$$\widetilde{\mathcal{S}} \coloneqq \{f + \mathcal{Z}: \ f \in \mathcal{S}\}.$$

Entonces $\widetilde{\mathcal{S}}$ es un subconjunto denso de $L^p$.

*Demostración.* Es fácil ver que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}^p$, luego $\widetilde{\mathcal{S}} \subseteq L^p$. Sea $f \in \mathcal{L}^p$ tal que $f \geq 0$. Construimos una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tal que los valores de $s_n$ son múltiplos de $2^{-n}$, $s_n \leq f$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f$ puntualmente. Como $s_n \leq f$, obtenemos $s_n \in \mathcal{L}^p$ y por la desigualdad de Márkov–Chebyshov

$$\mu(\{x \in X: \ s_n(x) > 0\}) = \mu(\{x \in X: \ s_n(x)^p \geq 2^{-np}\}) \leq 2^{np} \int\limits_X s_n^p \, \mathrm{d}\mu < +\infty,$$

así que $s_n \in \mathcal{S}$. Por el teorema de la convergencia dominada, $\mathcal{N}_p(s_n - f) \to 0$. Pasando a las clases de equivalencia, concluimos que $s_n + \mathcal{Z} \in \widetilde{\mathcal{S}}$ y $s_n + \mathcal{Z} \to f + \mathcal{Z}$ en $L^p$. En general, cualquier función de clase $\mathcal{L}^p$ se escribe como una combinación lineal de cuatro funciones no negativas. $\square$

**10. Observación.** Como $L^p$ es completo y $\widetilde{\mathcal{S}}$ es denso en $L^p$, el espacio $L^p$ se puede ver como una completación de $\widetilde{\mathcal{S}}$. Notemos que las funciones $p$-integrables tienen una estructura complicada, y en varias aplicaciones surgen de manera natural varias subclases de $L^p$: funciones simples, funciones continuas, funciones continuas a trozos. La razón principal para trabajar con los espacios $L^p$ es su completitud.