Espacios métricos completos

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

1 Definición (sucesión de Cauchy)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión de Cauchy* si para cada $\varepsilon > 0$ existe k en $\mathbb{N}$ tal que para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}$ con $m, n \geq k$ se cumple la desigualdad $d(a_m, a_n) < \varepsilon$.

Otros términos equivalentes: sucesión fundamental, sucesión convergente en si.

2 Definición (las colas de una sucesión)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y sea k en $\mathbb{N}$. Entonces decimos que el siguiente conjunto es la k-ésima cola de la sucesión:

$$\big\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N},\ n \geq k\big\}.$$

3 Ejercicio (las colas de una sucesión forman una sucesión de conjuntos decreciente)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Para cada k en $\mathbb{N}$, denotemos por A_k la k-ésima cola de esta sucesión:

$$A_k \coloneqq \big\{a_n \colon\ n \in \mathbb{N},\ n \geq k\big\}.$$

Demostrar que para cada k en $\mathbb{N}$ se cumple la contención

$$A_{k+1} \subseteq A_k.$$

4 Definición (el medidor de Cauchy de una sucesión)**.** Dada una sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, definimos $\gamma_a \colon \mathbb{N} \to [0, +\infty]$ mediante la regla

$$\gamma_a(k) \coloneqq \sup_{m,n\geq k} d(a_n, a_m).$$

En otras palabras,

$$\gamma_a(k) = \operatorname{diam}\big\{a_n \colon\ n \geq k\big\}.$$

5 Ejercicio (el medidor de Cauchy es una sucesión decreciente)**.** Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Demostrar que la sucesión γ_a es decreciente:

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \gamma_a(k+1) \leq \gamma_a(k).$$

6 Proposición (criterio de sucesión de Cauchy en términos del medidor de Cauchy)**.** *Sea $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Entonces a es de Cauchy si, y sólo si, $\gamma_a(k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

7 Proposición (cada sucesión convergente es de Cauchy)**.** *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* X *y sea* b *un punto de* X *tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$*. Entonces* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy.*

Demostración. Ejercicio. $\square$

8 Definición (espacio métrico completo)**.** Un espacio métrico se llama *completo* si cada sucesión de Cauchy converge.

9 Definición (sucesión regular de Cauchy)**.** Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se dice que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *regular de Cauchy* si para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$d(a_n, a_{n+1}) \le 2^{-n-1}.$$

10 Proposición. *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión regular de Cauchy en* X*. Entonces* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy.*

Demostración. Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m > n$, entonces

$$d(a_n, a_m) \le \sum_{k=n}^{m-1} d(a_k, a_{k+1}) \le \sum_{k=n}^{m-1} 2^{k+1} < 2^{-n}.$$

Por lo tanto, para cada q en $\mathbb{N}$

$$\gamma_a(q) \le 2^{-q}.$$

Concluimos que la sucesión γ_a converge a 0. $\square$

11 Lema. *Sea* $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *una sucesión estrictamente creciente. Entonces para cada* k *en* $\mathbb{N}$ *tenemos*

$$\nu(k) \ge k.$$

Demostración. Por inducción. $\square$

12 Proposición (si una sucesión de Cauchy tiene subsucesión convergente, entonces converge)**.** *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* X *y sea* ν *una sucesión estrictamente creciente en* $\mathbb{N}$ *tal que la sucesión* $(a_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge a un punto* b *de* X*. Entonces la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge al punto* b*.*

Idea de demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Encontramos k_1 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(k_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Encontramos k_2 en $\mathbb{N}$ tal que

$$\forall m \geq k_2 \qquad d(a_{\nu(m)}, b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos $k_3 \coloneqq \max\{k_1, k_2\}$. Por el Lema 11, se cumple la desigualdad $\nu(k_3) \geq k_3$. Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ con $n \geq k_3$ tenemos

$$d(a_n, b) \leq d(a_n, a_{\nu(k_3)}) + d(a_{\nu(k_3)}, b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

13 Proposición. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces existe una sucesión estrictamente creciente ν en $\mathbb{N}$ tal que $(x_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ es regular de Cauchy.*

Idea de demostración. Para cada k en $\mathbb{N}$ encontrar $\sigma(k)$ en $\mathbb{N}$ tal que

$$\gamma_a(\sigma(k)) < 2^{-k-1}.$$

Ponemos $\nu(1) \coloneqq \sigma(1)$ y definimos la sucesión ν de manera inductiva:

$$\nu(k) \coloneqq \max\{\nu(k-1) + 1, \sigma(k)\}. \qquad \square$$

14 Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces (X, d) es completo si y solo si cualquier sucesión regular de Cauchy en X converge.*