Espacios métricos completos
y sucesiones de conjuntos anidados

Objetivos. Demostrar el criterio de completez de espacios métricos en términos de sucesiones de conjuntos anidados cerrados no vacíos cuyos diámetros tienden a cero.

Prerrequisitos. Sucesiones de Cauchy, le medidor de Cauchy de una sucesión, espacios métricos completos.

1 Lema. *Sea X un conjunto y sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X. Supongamos que esta sucesión es decreciente, esto es, para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la contención $G_{n+1} \subseteq G_n$. Entonces para cualesquiera p, q en $\mathbb{N}$ con $p \le q$ se cumple que $G_q \subseteq G_p$.*

Idea de demostración. Fijar p y aplicar la inducción matemática sobre q. □

2 Proposición (sobre una sucesión anidada de subconjuntos cerrados no vacíos, cuyos diámetros tienden a cero)**.** *Sea X un espacio métrico completo y sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple $G_{n+1} \subseteq G_n$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \ne \varnothing$.*

Demostración. Para cada n en $\mathbb{N}$ elegimos x_n en G_n. Dados m en $\mathbb{N}$ y p, q en $\mathbb{N}$ con $p, q \ge m$, tenemos que $x_p \in G_p \subseteq G_m$ y $x_q \in G_q \subseteq G_m$, así que

$$d(x_p, x_q) \le \operatorname{diam}(G_m).$$

Por lo tanto, podemos acotar el medidor de Cauchy de la sucesión x de la siguiente manera:

$$\gamma_x(m) = \sup_{p,q\ge m} d(x_p, x_q) \le \operatorname{diam}(G_m).$$

De aquí se sigue que $\gamma_x \to 0$. Luego x es de Cauchy.

Sea y el límite de la sucesión x. Para cada n en $\mathbb{N}$ y cada $\varepsilon > 0$ encontramos $p \ge n$ tal que $d(x_p, y) < \varepsilon$. Entonces $x_p \in G_p \subseteq G_n$. Hemos mostrado que $B(y, \varepsilon) \cap G_n \ne \varnothing$. Como ε es arbitrario, obtenemos que $y \in \operatorname{cl}(G_n)$. Recordamos que G_n es cerrado y concluimos que $y \in G_n$. Como n es arbitrario, hemos mostrado que $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. □

3 Observación. En la primera etapa de la demostración, cuando elegimos x_n en G_n para cada n en $\mathbb{N}$, no es necesario utilizar el axioma de elección. Esta construcción se justifica con el principio de inducción.

4 Ejercicio. En las condiciones de la Proposición 2, demostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ es un conjunto unipuntual.

5 Ejercicio. En el contexto de la Proposición 2, mostrar que la condición que G_n son cerrados es esencial. Construir un ejemplo tal que esta condición no se cumple, las demás condiciones se cumplen, y la conclusión de la proposición no se cumple.

6 Ejercicio. En el contexto de la Proposición 2, mostrar que es esencial la condición que $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$. Construir un ejemplo tal que esta condición no se cumple, las demás condiciones se cumplen, y la conclusión de la proposición no se cumple.

7 Ejercicio. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $Y \subseteq X$. Demostrar que $\operatorname{diam}(\operatorname{cl}(Y)) = \operatorname{diam}(Y)$.

El siguiente resultado se puede ver como el recíproco a la Proposición 2.

8 Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Supongamos que para cada sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X, tal que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple $G_{n+1} \subseteq G_n$ y $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(G_n) = 0$, se tiene que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \varnothing$. Entonces X es completo.*

Demostración. Sea x una sucesión de Cauchy en X. Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos

$$\mathbb{N}_m := \big\{n \in \mathbb{N} : \; n \geq m\big\}, \qquad G_m := \operatorname{cl}(x[\mathbb{N}_m]) = \operatorname{cl}\big(\big\{z \in X : \quad \exists n \geq m \quad z = x_n\big\}\big).$$

Los conjuntos G_m son cerrados, no vacíos ($x_m \in G_m$) y forman una sucesión decreciente: como $x[\mathbb{N}_{m+1}] \subseteq x[\mathbb{N}_m]$, se tiene que $G_{m+1} \subseteq G_m$. Además,

$$\operatorname{diam}(G_m) = \operatorname{diam}(x[\mathbb{N}_m]) = \gamma_x(m).$$

Como x es de Cauchy, $\gamma_x \to 0$. Aplicamos la suposición de la proposición y concluimos que existe y tal que $y \in G_m$ para cada m en $\mathbb{N}$. Entonces

$$d(x_m, y) \leq \operatorname{diam}(G_m) = \gamma_x(m),$$

luego $d(x_m, y) \to 0$ cuando $m \to \infty$. □

9 Ejercicio. Simplificar la demostración de la Proposición 8 suponiendo que x es regular de Cauchy. En este caso se puede escribir una cota superior explícita para γ_x.

10 Ejercicio. Unir las Proposiciones 2 y 8 en una proposición (un criterio necesario y suficiente de completez).