

Transformaciones lineales compactas entre espacios de Banach (un tema de la teoría de operadores)

Egor Maximenko

<https://esfm.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

28 de marzo de 2026

Objetivos

Introducir el concepto de operadores lineales compactos entre espacios de Banach.

Demostrar criterios elementales.

Prerrequisitos

- Conjuntos totalmente acotados en espacios métricos.
- Conjuntos compactos en espacios métricos.
- Espacios de Banach.
- Transformaciones lineales acotadas (= transformaciones lineales continuas).

Transformaciones lineales compactas, definición

En este tema suponemos que V y W son espacios de Banach complejos.

Transformaciones lineales compactas, definición

En este tema suponemos que V y W son espacios de Banach complejos.

$$B_V := \{x \in V : \|x\|_V < 1\}, \quad B_W := \{y \in W : \|y\|_W < 1\}.$$

Transformaciones lineales compactas, definición

En este tema suponemos que V y W son espacios de Banach complejos.

$$B_V := \{x \in V : \|x\|_V < 1\}, \quad B_W := \{y \in W : \|y\|_W < 1\}.$$

Definición

Una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ se llama **compacta**, si $\text{cl}(T[B_V])$ es un subconjunto compacto de W .

Transformaciones lineales compactas, definición

En este tema suponemos que V y W son espacios de Banach complejos.

$$B_V := \{x \in V : \|x\|_V < 1\}, \quad B_W := \{y \in W : \|y\|_W < 1\}.$$

Definición

Una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ se llama **compacta**, si $\text{cl}(T[B_V])$ es un subconjunto compacto de W .

$\mathcal{K}(V, W) :=$ todas las transformaciones lineales compactas $V \rightarrow W$.

Repaso: espacios métricos compactos y totalmente acotados

Proposición

Sea X un espacio métrico. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) X es compacto;
- (b) para cada sucesión $s: \mathbb{N} \rightarrow X$, existe una subsucesión convergente;
- (c) X es completo y totalmente acotado.

Repaso: la cerradura de un conjunto totalmente acotado

Proposición

Si X es un espacio métrico y $A \subseteq X$ es totalmente acotado, entonces $\text{cl}(A)$ también es totalmente acotado.

Repaso: subconjunto de un conjunto totalmente acotado

Proposición

Si X es un espacio métrico, $Z \subseteq Y \subseteq X$ y Y es totalmente acotado, entonces Z es totalmente acotado.

Repaso: conjuntos totalmente acotados y funciones Lipschitz continuas

Proposición

Si X, Y son espacios métricos, $f \in \text{Lip}(X, Y)$, $Q \subseteq X$ es un conjunto totalmente acotado, entonces $f[Q]$ es un conjunto totalmente acotado.

Repaso: un múltiplo por escalar de un conjunto totalmente acotado

Proposición

Si $Q \subseteq V$ es totalmente acotado y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λQ es totalmente acotado.

Repaso: un múltiplo por escalar de un conjunto totalmente acotado

Proposición

Si $Q \subseteq V$ es totalmente acotado y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λQ es totalmente acotado.

Demostración.

Repaso: un múltiplo por escalar de un conjunto totalmente acotado

Proposición

Si $Q \subseteq V$ es totalmente acotado y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λQ es totalmente acotado.

Demostración.

Definimos $f: V \rightarrow V$, $f(v) := \lambda v$.

Repaso: un múltiplo por escalar de un conjunto totalmente acotado

Proposición

Si $Q \subseteq V$ es totalmente acotado y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λQ es totalmente acotado.

Demostración.

Definimos $f: V \rightarrow V$, $f(v) := \lambda v$.

f es Lipschitz continua.

Repaso: un múltiplo por escalar de un conjunto totalmente acotado

Proposición

Si $Q \subseteq V$ es totalmente acotado y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces λQ es totalmente acotado.

Demostración.

Definimos $f: V \rightarrow V$, $f(v) := \lambda v$.

f es Lipschitz continua.

$\lambda Q = f[Q]$.

Criterio de transformaciones lineales compactas en términos de conjuntos totalmente acotados

Proposición

Sean V, W espacios de Banach complejos y sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal.

Son equivalentes:

- (a) T es compacta;
- (b) $T[B_V]$ es totalmente acotado;
- (c) para cada $D \subseteq V$ acotado, $T[D]$ es totalmente acotado;
- (d) para cada $D \subseteq V$ acotado, $\text{cl}(T[D])$ es compacto.

Demostración, $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que T es compacta.

Demostración, $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que T es compacta.

Esto significa que $\text{cl}(T[B_V])$ es un conjunto compacto.

Demostración, $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que T es compacta.

Esto significa que $\text{cl}(T[B_V])$ es un conjunto compacto.

Por lo tanto, $\text{cl}(T[B_V])$ es totalmente acotado.

Demostración, $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que T es compacta.

Esto significa que $\text{cl}(T[B_V])$ es un conjunto compacto.

Por lo tanto, $\text{cl}(T[B_V])$ es totalmente acotado.

Por lo tanto, su subconjunto $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Demostración, (b) \Rightarrow (c)

Supongamos que $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Demostración, $(b) \Rightarrow (c)$

Supongamos que $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $T[D]$ es totalmente acotado.

Demostración, (b) \Rightarrow (c)

Supongamos que $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $T[D]$ es totalmente acotado.

Como D es acotado, existe $r > 0$ tal que $D \subseteq rB_V$.

Demostración, (b) \Rightarrow (c)

Supongamos que $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $T[D]$ es totalmente acotado.

Como D es acotado, existe $r > 0$ tal que $D \subseteq rB_V$.

Luego $T[D] \subseteq T[rB_V] = rT[B_V]$.

Demostración, (b) \Rightarrow (c)

Supongamos que $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $T[D]$ es totalmente acotado.

Como D es acotado, existe $r > 0$ tal que $D \subseteq rB_V$.

Luego $T[D] \subseteq T[rB_V] = rT[B_V]$.

Como $T[B_V]$ es totalmente acotado, concluimos que

Demostración, (b) \Rightarrow (c)

Supongamos que $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $T[D]$ es totalmente acotado.

Como D es acotado, existe $r > 0$ tal que $D \subseteq rB_V$.

Luego $T[D] \subseteq T[rB_V] = rT[B_V]$.

Como $T[B_V]$ es totalmente acotado, concluimos que $rT[B_V]$ es totalmente acotado y $T[D]$ es totalmente acotado.

Demostración, $(c) \Rightarrow (d)$

Supongamos que se cumple (c).

Demostración, (c) \Rightarrow (d)

Supongamos que se cumple (c).

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $\text{cl}(T[D])$ es compacto.

Demostración, (c) \Rightarrow (d)

Supongamos que se cumple (c).

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $\text{cl}(T[D])$ es compacto.

Por (c),

Demostración, $(c) \Rightarrow (d)$

Supongamos que se cumple (c).

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $\text{cl}(T[D])$ es compacto.

Por (c), $T[D]$ es totalmente acotado.

Demostración, (c) \Rightarrow (d)

Supongamos que se cumple (c).

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $\text{cl}(T[D])$ es compacto.

Por (c), $T[D]$ es totalmente acotado.

Luego su cerradura $\text{cl}(T[D])$ también es un conjunto totalmente acotado.

Demostración, (c) \Rightarrow (d)

Supongamos que se cumple (c).

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $\text{cl}(T[D])$ es compacto.

Por (c), $T[D]$ es totalmente acotado.

Luego su cerradura $\text{cl}(T[D])$ también es un conjunto totalmente acotado.

Además, como W es completo, $\text{cl}(T[D])$ es completo.

Demostración, (c) \Rightarrow (d)

Supongamos que se cumple (c).

Sea D un subconjunto acotado de V .

Queremos mostrar que $\text{cl}(T[D])$ es compacto.

Por (c), $T[D]$ es totalmente acotado.

Luego su cerradura $\text{cl}(T[D])$ también es un conjunto totalmente acotado.

Además, como W es completo, $\text{cl}(T[D])$ es completo.

Como $\text{cl}(T[D])$ es totalmente acotado y completo, es compacto.

Demostración, $(d) \Rightarrow (a)$

Supongamos que se cumple (d) .

Demostración, (d) \Rightarrow (a)

Supongamos que se cumple (d).

Como B_V es un subconjunto acotado del espacio V ,

Demostración, (d) \Rightarrow (a)

Supongamos que se cumple (d).

Como B_V es un subconjunto acotado del espacio V , por la condición (d), $\text{cl}(T[B_V])$ es compacto.

Las transformaciones lineales compactas son acotadas

Proposición

$$\mathcal{K}(V, W) \subseteq \mathcal{B}(V, W).$$

Las transformaciones lineales compactas son acotadas

Proposición

$$\mathcal{K}(V, W) \subseteq \mathcal{B}(V, W).$$

Demostración.

Las transformaciones lineales compactas son acotadas

Proposición

$$\mathcal{K}(V, W) \subseteq \mathcal{B}(V, W).$$

Demostración.

Sea $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Las transformaciones lineales compactas son acotadas

Proposición

$$\mathcal{K}(V, W) \subseteq \mathcal{B}(V, W).$$

Demostración.

Sea $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Por el criterio que hemos demostrado, $T[B_V]$ es

Las transformaciones lineales compactas son acotadas

Proposición

$$\mathcal{K}(V, W) \subseteq \mathcal{B}(V, W).$$

Demostración.

Sea $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Por el criterio que hemos demostrado, $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Las transformaciones lineales compactas son acotadas

Proposición

$$\mathcal{K}(V, W) \subseteq \mathcal{B}(V, W).$$

Demostración.

Sea $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Por el criterio que hemos demostrado, $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Luego $T[B_V]$ es acotado.

Las transformaciones lineales compactas son acotadas

Proposición

$$\mathcal{K}(V, W) \subseteq \mathcal{B}(V, W).$$

Demostración.

Sea $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Por el criterio que hemos demostrado, $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Luego $T[B_V]$ es acotado.

Esto implica que $T \in \mathcal{B}(V, W)$.

Criterio de transformaciones lineales compactas en términos de sucesiones

Proposición

Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal.

Son equivalentes:

- (a) T es compacta;
- (b) para cada sucesión acotada $s: \mathbb{N} \rightarrow V$,
en la sucesión $T \circ s$ existe una subsucesión convergente.

Demostración, $(a) \Rightarrow (b)$

Supongamos que T es compacta y $s: \mathbb{N} \rightarrow V$ es acotada.

Demostración, (a) \Rightarrow (b)

Supongamos que T es compacta y $s: \mathbb{N} \rightarrow V$ es acotada.

Sea $r > 0$ tal que $s[\mathbb{N}] \subseteq r B_V$.

Demostración, (a) \Rightarrow (b)

Supongamos que T es compacta y $s: \mathbb{N} \rightarrow V$ es acotada.

Sea $r > 0$ tal que $s[\mathbb{N}] \subseteq r B_V$.

Entonces, para cada k en \mathbb{N} tenemos que $s_k \in r B_V$ y

$$T(s_k) \in T[r B_V] \subseteq \text{cl}(T[r B_V]).$$

Demostración, (a) \Rightarrow (b)

Supongamos que T es compacta y $s: \mathbb{N} \rightarrow V$ es acotada.

Sea $r > 0$ tal que $s[\mathbb{N}] \subseteq r B_V$.

Entonces, para cada k en \mathbb{N} tenemos que $s_k \in r B_V$ y

$$T(s_k) \in T[r B_V] \subseteq \text{cl}(T[r B_V]).$$

Como $r B_V$ es acotado y T es compacta,

Demostración, (a) \Rightarrow (b)

Supongamos que T es compacta y $s: \mathbb{N} \rightarrow V$ es acotada.

Sea $r > 0$ tal que $s[\mathbb{N}] \subseteq r B_V$.

Entonces, para cada k en \mathbb{N} tenemos que $s_k \in r B_V$ y

$$T(s_k) \in T[r B_V] \subseteq \text{cl}(T[r B_V]).$$

Como $r B_V$ es acotado y T es compacta, $\text{cl}(T[r B_V])$ es compacto.

Demostración, (a) \Rightarrow (b)

Supongamos que T es compacta y $s: \mathbb{N} \rightarrow V$ es acotada.

Sea $r > 0$ tal que $s[\mathbb{N}] \subseteq r B_V$.

Entonces, para cada k en \mathbb{N} tenemos que $s_k \in r B_V$ y

$$T(s_k) \in T[r B_V] \subseteq \text{cl}(T[r B_V]).$$

Como $r B_V$ es acotado y T es compacta, $\text{cl}(T[r B_V])$ es compacto.

La sucesión $T \circ s$ toma valores en $\text{cl}(T[r B_V])$,
luego tiene una subsucesión convergente.

Demostración, (b) \Rightarrow (a)

Supongamos que para cada sucesión acotada $s: \mathbb{N} \rightarrow V$, la sucesión $T \circ s$ tiene una subsucesión convergente.

Demostración, (b) \Rightarrow (a)

Supongamos que para cada sucesión acotada $s: \mathbb{N} \rightarrow V$, la sucesión $T \circ s$ tiene una subsucesión convergente.

Sea $u: \mathbb{N} \rightarrow T[B_V]$.

Demostración, (b) \Rightarrow (a)

Supongamos que para cada sucesión acotada $s: \mathbb{N} \rightarrow V$, la sucesión $T \circ s$ tiene una subsucesión convergente.

Sea $u: \mathbb{N} \rightarrow T[B_V]$.

Encontramos una sucesión $s: \mathbb{N} \rightarrow B_V$ tal que $u = T \circ s$.

Demostración, (b) \Rightarrow (a)

Supongamos que para cada sucesión acotada $s: \mathbb{N} \rightarrow V$, la sucesión $T \circ s$ tiene una subsucesión convergente.

Sea $u: \mathbb{N} \rightarrow T[B_V]$.

Encontramos una sucesión $s: \mathbb{N} \rightarrow B_V$ tal que $u = T \circ s$.

Como s es acotada, u tiene una subsucesión convergente.

Demostración, (b) \Rightarrow (a)

Supongamos que para cada sucesión acotada $s: \mathbb{N} \rightarrow V$, la sucesión $T \circ s$ tiene una subsucesión convergente.

Sea $u: \mathbb{N} \rightarrow T[B_V]$.

Encontramos una sucesión $s: \mathbb{N} \rightarrow B_V$ tal que $u = T \circ s$.

Como s es acotada, u tiene una subsucesión convergente.

Hemos demostrado que $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Repaso: criterio de conjuntos totalmente acotados en los espacios normados de dimensión finita

Proposición

Si V es un espacio normado de dimensión finita y $X \subseteq V$, entonces

X es acotado $\iff X$ es totalmente acotado.

Repaso: criterio de conjuntos totalmente acotados en los espacios normados de dimensión finita

Proposición

Si V es un espacio normado de dimensión finita y $X \subseteq V$, entonces

$$X \text{ es acotado} \iff X \text{ es totalmente acotado.}$$

Idea de demostración.

Repaso: criterio de conjuntos totalmente acotados en los espacios normados de dimensión finita

Proposición

Si V es un espacio normado de dimensión finita y $X \subseteq V$, entonces

$$X \text{ es acotado} \iff X \text{ es totalmente acotado.}$$

Idea de demostración.

Primero, se demuestra en el caso particular $V = \mathbb{C}^n$.

Repaso: criterio de conjuntos totalmente acotados en los espacios normados de dimensión finita

Proposición

Si V es un espacio normado de dimensión finita y $X \subseteq V$, entonces

$$X \text{ es acotado} \iff X \text{ es totalmente acotado.}$$

Idea de demostración.

Primero, se demuestra en el caso particular $V = \mathbb{C}^n$.

Luego, si $U: \mathbb{C}^n \rightarrow V$ es un isomorfismo lineal, $U \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n, V)$ y $U^{-1} \in \mathcal{B}(V, \mathbb{C}^n)$.

Las transformaciones lineales acotadas de rango finito son compactas

Proposición

Sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que su imagen $T[V]$ tiene dimensión finita.

Entonces, $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Las transformaciones lineales acotadas de rango finito son compactas

Proposición

Sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que su imagen $T[V]$ tiene dimensión finita.

Entonces, $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Demostración.

Las transformaciones lineales acotadas de rango finito son compactas

Proposición

Sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que su imagen $T[V]$ tiene dimensión finita.

Entonces, $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Demostración.

$T[V]$ es un espacio normado de dimensión finita.

Las transformaciones lineales acotadas de rango finito son compactas

Proposición

Sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que su imagen $T[V]$ tiene dimensión finita.

Entonces, $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Demostración.

$T[V]$ es un espacio normado de dimensión finita.

$T[B_V]$ es un subconjunto acotado de $T[V]$.

Las transformaciones lineales acotadas de rango finito son compactas

Proposición

Sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que su imagen $T[V]$ tiene dimensión finita.

Entonces, $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Demostración.

$T[V]$ es un espacio normado de dimensión finita.

$T[B_V]$ es un subconjunto acotado de $T[V]$.

Luego $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Las transformaciones lineales acotadas de rango finito son compactas

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que su imagen $T[V]$ tiene dimensión finita, entonces $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Las transformaciones lineales acotadas de rango finito son compactas

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que su imagen $T[V]$ tiene dimensión finita, entonces $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Corolario

Si V es de dimensión finita y $T \in \mathcal{B}(V, W)$, entonces $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Las transformaciones lineales acotadas de rango finito son compactas

Proposición

Si $T \in \mathcal{B}(V, W)$ tal que su imagen $T[V]$ tiene dimensión finita, entonces $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Corolario

Si V es de dimensión finita y $T \in \mathcal{B}(V, W)$, entonces $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Corolario

Si W es de dimensión finita y $T \in \mathcal{B}(V, W)$, entonces $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Ejemplo: el operador identidad

Proposición

Si V es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces el operador identidad I_V no es compacto.

Ejemplo: el operador identidad

Proposición

Si V es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces el operador identidad I_V no es compacto.

Demostración.

Ejemplo: el operador identidad

Proposición

Si V es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces el operador identidad I_V no es compacto.

Demostración.

Notamos que $I_V[B_V]$

Ejemplo: el operador identidad

Proposición

Si V es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces el operador identidad I_V no es compacto.

Demostración.

Notamos que $I_V[B_V] =$

Ejemplo: el operador identidad

Proposición

Si V es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces el operador identidad I_V no es compacto.

Demostración.

Notamos que $I_V[B_V] = B_V$.

Ejemplo: el operador identidad

Proposición

Si V es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces el operador identidad I_V no es compacto.

Demostración.

Notamos que $I_V[B_V] = B_V$.

Por el teorema de Riesz sobre la esfera y bola unitaria, B_V no es totalmente acotado.

Los operadores invertibles entre los espacios de dimensión infinita no son compactos

Proposición

Sean V y W espacios de Banach de dimensión infinita y sea $T \in \mathcal{B}(V, W)$ un operador invertible. Entonces, $T \notin \mathcal{K}(V, W)$.

Demostración

Estamos suponiendo que T es acotada e invertible.

Demostración

Estamos suponiendo que T es acotada e invertible.

Por el teorema de Banach–Schauder sobre la transformación lineal abierta,

Demostración

Estamos suponiendo que T es acotada e invertible.

Por el teorema de Banach–Schauder sobre la transformación lineal abierta, T es abierta.

Demostración

Estamos suponiendo que T es acotada e invertible.

Por el teorema de Banach–Schauder sobre la transformación lineal abierta, T es abierta.

Luego $T[B_V]$ es un conjunto abierto.

Demostración

Estamos suponiendo que T es acotada e invertible.

Por el teorema de Banach–Schauder sobre la transformación lineal abierta, T es abierta.

Luego $T[B_V]$ es un conjunto abierto.

Como $0_W \in T[B_V]$, existe $r > 0$ tal que $rB_W \subseteq T[B_V]$.

Demostración

Estamos suponiendo que T es acotada e invertible.

Por el teorema de Banach–Schauder sobre la transformación lineal abierta, T es abierta.

Luego $T[B_V]$ es un conjunto abierto.

Como $0_W \in T[B_V]$, existe $r > 0$ tal que $rB_W \subseteq T[B_V]$.

Por el teorema de Riesz, B_W no es totalmente acotado.

Demostración

Estamos suponiendo que T es acotada e invertible.

Por el teorema de Banach–Schauder sobre la transformación lineal abierta, T es abierta.

Luego $T[B_V]$ es un conjunto abierto.

Como $0_W \in T[B_V]$, existe $r > 0$ tal que $rB_W \subseteq T[B_V]$.

Por el teorema de Riesz, B_W no es totalmente acotado.

Luego rB_W y $T[B_V]$ no son totalmente acotados.