Propiedades espectrales elementales de operadores compactos

Objetivos. Dado un operador lineal compacto en un espacio de Hilbert, estudiar algunas propiedades básicas de sus valores y vectores propios.

Prerrequisitos. Definición del operador compacto, definición del operador adjunto.

En este tema suponemos que H es un espacio de Hilbert.

Dado un operador T en $\mathcal{B}(H)$, denotamos por $\sigma_p(T)$ su espectro puntual:

$$\sigma_p(T) \coloneqq \big\{\lambda \in \mathbb{C}: \ \ker(\lambda I - T) \neq \{0_H\}\big\}.$$

Operadores acotados por abajo (repaso)

1 Definición. Un operador A de clase $\mathcal{B}(H)$ se llama *acotado por abajo* si existe $\gamma > 0$ tal que

$$\forall x \in H \qquad \|Ax\| \geq \gamma \|x\|.$$

2 Proposición. *A es acotado por abajo si, y sólo si,*

$$\inf_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \|Ax\| > 0.$$

Demostración. Ejercicio. □

3 Proposición. *A no es acotado por abajo si, y sólo si, existe una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vectores de norma 1 tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \|Au_k\| = 0.$$

Demostración. Ejercicio. □

4 Proposición. *Si $A \in \mathcal{B}(H)$ y A es acotado por abajo, entonces A es inyectivo y el subespacio $\operatorname{im}(A)$ es cerrado.*

Demostración. 1. Si $x \in H$ y $Ax = 0$, entonces

$$\|x\| \le \frac{1}{\gamma}\|Ax\| = 0.$$

2. Sean $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\operatorname{im}(A)$ y $w \in H$ tales que $w_k \to v$ cuando $k \to \infty$. Para cada k en $\mathbb{N}$, encontramos u_k en H tal que $Au_k = v_k$. Como $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y para cada j, k en $\mathbb{N}$ se tiene la desigualdad

$$\|u_j - u_k\| \le \frac{1}{\gamma}\|Au_j - Au_k\|,$$

concluimos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Luego $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene un límite p. Como A es continuo, tenemos que $Au_k \to Ap$. Por otro lado, $Au_k = v_k \to w$. Luego $Ap = w$ y $w \in \operatorname{im}(A)$. $\square$

5 Proposición. *Si $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que A es acotado por abajo y A^* es acotado por abajo, entonces A es invertible y su inverso es acotado.*

Demostración. Ya sabemos que $\ker(A) = \{0_H\}$, $\ker(A^*) = \{0_H\}$ y el subespacio $\operatorname{im}(A)$ es cerrado. Luego

$$\operatorname{im}(A) = \operatorname{cl}(\operatorname{im}(A)) = \ker(A^*)^\perp = \{0_H\}^\perp = H.$$

Como A es inyectivo y sobre, existe una función inversa. Sea $\gamma > 0$ tal que

$$\forall x \in H \qquad \|Ax\| \ge \gamma\|x\|.$$

Para cada x en H tenemos que

$$\|x\| = \|AA^{-1}x\| \ge \gamma\|A^{-1}x\|,$$

así que A^{-1} es acotado y $\|A^{-1}\| \le 1/\gamma$. $\square$

Propiedades espectrales básicas de operadores compactos

6 Proposición (para cada valor propio distinto de cero, el subespacio propio tiene dimensión finita)**.** *Si $T \in \mathcal{B}(H)$ y $\lambda \in \sigma_p(H)$ tal que $\lambda \ne 0$, entonces $\ker(\lambda I - T)$ es un subespacio de H de dimensión finita.*

Demostración. Denotemos $\ker(\lambda I - T)$ por S. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que S es de dimensión infinita. Elegimos en S una sucesión de vectores linealmente independientes. Al aplicar el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt, obtenemos una sucesión ortonormal $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en S. Notemos que para cada j en $\mathbb{N}$,

$$Ta_j = \lambda a_j.$$

Si $j, k \in \mathbb{N}$ y $j \neq k$, entonces

$$\|Ta_j - Ta_k\| = \|\lambda a_j - \lambda a_k\| = |\lambda|\|a_j - a_k\| = |\lambda|\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, $(Ta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ermitaña en $\operatorname{im}(T)$. Esto contradice a la suposición que T es compacto. □

7 Proposición. *Si $T \in \mathcal{B}_0(H)$, $\lambda \neq 0$ y $\lambda I - T$ no es acotado por abajo, entonces $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

Demostración. Como $\lambda I - T$ no es acotado por abajo, encontramos una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vectores de norma 1 tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|\lambda u_k - Tu_k\| = 0.$$

Como T es compacto, la sucesión $(Tu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Sea $\nu \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente y sea $w \in H$ tales que

$$\lim_{k\to\infty} (Tu_{\nu(k)}) = w.$$

Notamos que

$$u_{\nu(k)} = \frac{1}{\lambda}\lambda u_{\nu(k)} = \frac{1}{\lambda}\big(\lambda u_{\nu(k)} - Tu_{\nu(k)}\big) + \frac{1}{\lambda}Tu_{\nu(k)}.$$

Pasamos al límite cuando $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} u_{\nu(k)} = \frac{1}{\lambda}w. \tag{1}$$

Como la norma en H es una función continua,

$$1 = \left\|\frac{1}{\lambda}w\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\|w\|].$$

En particular, concluimos que $w \neq 0_H$. Como T es continuo, de (1) concluimos que

$$w = \lim_{k\to\infty} (Tu_{\nu(k)}) = \frac{1}{\lambda}Tw,$$

así que $Tw = \lambda w$. □

8 Proposición. *Si $T \in \mathcal{B}_0(H)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \sigma_p(T)$ y $\overline{\lambda} \notin \sigma_p(T^*)$, entonces el operador $\lambda I - T$ tiene un inverso acotado.*

Demostración. Sea $A = \lambda I - T$. Por la proposición anterior, sabemos que A es acotado por abajo. Aplicando la proposición anterior al operador compacto T^* y el número $\overline{\lambda}$, concluimos que A^* es acotado por abajo. Por lo tanto, A es invertible y su inverso es acotado. □