Transformaciones lineales compactas y composiciones (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

2 de agosto de 2024

Objetivo

Demostrar que composiciones de transformaciones lineales compactas
con transformaciones lineales acotadas
son compactas.

Prerrequisitos

- Transformaciones lineales compactas.
- Imágenes de conjuntos totalmente acotados respecto a funciones Lipschitz continuas.
- Operaciones lineales con conjuntos totalmente acotados en espacios normados.

Transformaciones lineales compactas, definición

En este tema suponemos que V, W, X son espacios de Banach complejos.

Transformaciones lineales compactas, definición

En este tema suponemos que V, W, X son espacios de Banach complejos.

$$B_V := \left\{ v \in V\colon\ \|v\|_V < 1 \right\}.$$

Definición

Una transformación lineal $T\colon V \to W$ se llama compacta,
si $\operatorname{cl}(T[B_V])$ es un subconjunto compacto de W.

Transformaciones lineales compactas, definición

En este tema suponemos que V, W, X son espacios de Banach complejos.

$$B_V := \Big\{ v \in V \colon\ \|v\|_V < 1 \Big\}.$$

Definición

Una transformación lineal $T \colon V \to W$ se llama compacta,
si $\mathrm{cl}(T[B_V])$ es un subconjunto compacto de W.

$\mathcal{K}(V, W) :=$ todas las transformaciones lineales compactas $V \to W$.

Transformaciones lineales compactas = totalmente acotadas

Proposición

Sean V, W espacios de Banach complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Son equivalentes:

(a) T es compacta;

(b) $T[B_V]$ es totalmente acotado;

(c) para cada $D \subseteq V$ acotado, $T[D]$ es totalmente acotado.

Transformaciones lineales compactas = totalmente acotadas

Proposición

Sean V, W espacios de Banach complejos y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal.

Son equivalentes:

(a) T es compacta;

(b) $T[B_V]$ es totalmente acotado;

(c) para cada $D \subseteq V$ acotado, $T[D]$ es totalmente acotado.

Este criterio, en general, no se cumple para espacios normados.

Transformaciones lineales compactas = totalmente acotadas

Proposición

Sean V, W espacios de Banach complejos y sea $T \colon V \to W$ una transformación lineal.

Son equivalentes:

(a) T es compacta;

(b) $T[B_V]$ es totalmente acotado;

(c) para cada $D \subseteq V$ acotado, $T[D]$ es totalmente acotado.

Este criterio, en general, no se cumple para espacios normados.

Corolario

$\mathcal{K}(V, W) \subseteq \mathcal{B}(V, W)$.

Repaso: conjuntos totalmente acotados y funciones Lipschitz continuas

En este recordatorio suponemos que X, Y son espacios métricos.

Proposición

Sean $f \in \mathrm{Lip}(X, Y)$, $Q \subseteq X$ un conjunto totalmente acotado.

Entonces, $f[Q]$ es un conjunto totalmente acotado.

Repaso: un múltiple por escalar de un conjunto totalmente acotado

En este recordatorio suponemos que V es un espacio normado complejo.

Proposición

Sea $Q \subseteq V$ totalmente acotado y sea $\lambda \in \mathbb{C}$.

Entonces, λQ es totalmente acotado.

Idea: la función $\quad v \mapsto \lambda v \quad$ es Lipschitz continua.

Composición ST, donde $S \in \mathcal{K}(V, W)$

Regresamos a la suposición que V, W, X son espacios de Banach complejos.

Proposición

Sean $S \in \mathcal{K}(W, X)$, $T \in \mathcal{B}(V, W)$.

Entonces, $ST \in \mathcal{K}(V, W)$.

Demostración

Como $T \in \mathcal{B}(V, W)$, elegimos $\gamma > 0$ tal que

$$T[B_V] \subseteq \gamma B_W.$$

Demostración

Como $T \in \mathcal{B}(V, W)$, elegimos $\gamma > 0$ tal que

$$T[B_V] \subseteq \gamma B_W.$$

Luego

$$(ST)[B_V]$$

Demostración

Como $T \in \mathcal{B}(V, W)$, elegimos $\gamma > 0$ tal que

$$T[B_V] \subseteq \gamma B_W.$$

Luego

$$(ST)[B_V] =$$

Demostración

Como $T \in \mathcal{B}(V, W)$, elegimos $\gamma > 0$ tal que

$$T[B_V] \subseteq \gamma B_W.$$

Luego

$$(ST)[B_V] = S[T[B_V]]$$

Demostración

Como $T \in \mathcal{B}(V, W)$, elegimos $\gamma > 0$ tal que

$$T[B_V] \subseteq \gamma B_W.$$

Luego

$$(ST)[B_V] = S[T[B_V]] \subseteq$$

Demostración

Como $T \in \mathcal{B}(V, W)$, elegimos $\gamma > 0$ tal que

$$T[B_V] \subseteq \gamma B_W.$$

Luego

$$(ST)[B_V] = S[T[B_V]] \subseteq S[\gamma B_W]$$

Demostración

Como $T \in \mathcal{B}(V, W)$, elegimos $\gamma > 0$ tal que

$$T[B_V] \subseteq \gamma B_W.$$

Luego

$$(ST)[B_V] = S[T[B_V]] \subseteq S[\gamma B_W] =$$

Demostración

Como $T \in \mathcal{B}(V, W)$, elegimos $\gamma > 0$ tal que

$$T[B_V] \subseteq \gamma B_W.$$

Luego

$$(ST)[B_V] = S[T[B_V]] \subseteq S[\gamma B_W] = \gamma S[B_W].$$

Demostración

Como $T \in \mathcal{B}(V, W)$, elegimos $\gamma > 0$ tal que

$$T[B_V] \subseteq \gamma B_W.$$

Luego

$$(ST)[B_V] = S[T[B_V]] \subseteq S[\gamma B_W] = \gamma S[B_W].$$

Como $S \in \mathcal{K}(W, X)$, $\quad S[B_W]$ es totalmente acotado.

Luego $\gamma S[B_W]$ y $(ST)[B_V]$ también son totalmente acotados.

Composición ST, donde $T \in \mathcal{K}(V, W)$

Proposición

Sean $S \in \mathcal{B}(W, X)$, $T \in \mathcal{K}(V, W)$.

Entonces, $ST \in \mathcal{K}(V, W)$.

Demostración

Como $T \in \mathcal{K}(V, W)$, $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Demostración

Como $T \in \mathcal{K}(V, W)$, $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Recordamos que

$$(ST)[B_V] = S[T[B_V]].$$

Demostración

Como $T \in \mathcal{K}(V, W)$, $T[B_V]$ es totalmente acotado.

Recordamos que

$$(ST)[B_V] = S[T[B_V]].$$

Como $S \in \mathcal{B}(W, X) \subseteq \mathrm{Lip}(W, X)$, $\quad S[T[B_V]]$ es totalmente acotado.