Criterio de compacidad para espacios métricos

Objetivos. Establecer un criterio de compacidad del espacio métrico.

Prerrequisitos. Espacios métricos totalmente acotados, espacios topológicos compactos, punto de acumulación de una sucesión.

Definición de espacios compactos, repaso

1 Definición. Un espacio topológico X se llama *compacto* si para cada $\mathcal{A} \subseteq \tau$ con $\cup\mathcal{A} = X$ existe $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{B}$ es finito y $\cup\mathcal{B} = X$.

2 Proposición (criterio de espacio compacto en términos de colecciones centrados de conjuntos cerrados, repaso)**.** *Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si, y solo si, cualquier colección centrada de conjuntos cerrados tiene intersección no vacía.*

Punto de acumulación de una sucesión, repaso

3 Definición (punto de acumulación de una sucesión, repaso)**.** Sean X un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $a \in X$. Se dice que a es un *punto de acumulación* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si para cualquier A en τ tal que $a \in A$ y para cada m en $\mathbb{N}$ existe un n en $\mathbb{N}$ tal que $n \geq m$ y $x_n \in A$.

4 Proposición (criterio del punto de acumulación, repaso)**.** *Sean X un espacio métrico, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X, $a \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) a es un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

(b) para cada m en $\mathbb{N}$, $a \in \operatorname{cl}(\{x_n\colon\ n \geq m\})$;

(c) existe una función creciente $\nu\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que la sucesión $(x_{\nu(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge al punto a.

Criterio de compacidad para espacios métricos

5 Teorema. *Sea X un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X es compacto;

(b) X es secuencialmente compacto, esto es, cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente;

(c) X es totalmente acotado y completo.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Supongamos que X es compacto. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Pongamos

$$F_m = \operatorname{cl}(\{x_n\colon\ n \ge m\}).$$

Notamos que $\{F_m\colon\ m\in\mathbb{N}\}$ es una colección centrada, y sus elementos son conjuntos cerrados. Sea $b\in\bigcap_{m\in\mathbb{N}} F_m$. Entonces b un punto de acumulación de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b)$\Rightarrow$(c). Supongamos que X es secuencialmente compacto. Entonces cada suseción en X tiene una subsucesión convergente y por lo tanto de Cauchy, lo cual significa que X es totalmente acotado. Además, cada sucesión de Cauchy en X tiene una subsucesión convergente y por lo tanto converge, lo cual significa que X es completo.

(c)$\Rightarrow$(a). Supongamos que X es totalmente acotado y completo, pero no es compacto. Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de X que no tiene subcubierta finita. Construimos en X una $1/4$-red finita D_1. Entonces $X=\bigcup_{x\in D_1} B(x,1/4)$. Si para cada x en D_1 la bola $B(x,1/4)$ tiene una $\mathcal{A}$-subcubierta finita, entonces X tiene una cubierta finita, lo cual contradice a la suposición. Sea $y_1\in D_1$ tal que $B(y_1,1/4)$ no tiene $\mathcal{A}$-subcubierta finita. En el p-ésimo paso usamos el hecho que $B(y_{p-1},2^{-p})$ es totalmente acotado y encontramos una 2^{-p-1}-cubierta finita D_p del conjunto $B(y_{p-1},1/2^p)$. Sea $y_p\in D_p$ tal que $B(y_p,2^{-p-1})$ no tiene $\mathcal{A}$-subcubierta finita.

Notamos que $y_p\in B(y_{p-1},1/2^p)$, así que $d(y_{p-1},y_p)<1/2^p$. Luego $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión regular de Cauchy. Usando la hipótesis que X es completo encontramos z en X tal que $\lim_{p\to\infty} y_p = z$. Sea $A\in\mathcal{A}$ tal que $z\in A$. Como A es abierto, hay un $\varepsilon>0$ tal que $B(z,\varepsilon)\subseteq A$. Usando los hechos que $y_p\to z$ y $1/2^p\to 0$ cuando $p\to\infty$, encontramos p en $\mathbb{N}$ tal que $d(y_p,z)<\varepsilon/2$ y $2^{-p-1}<\varepsilon/2$. Luego $B(y_p,2^{-p-1})\subseteq B(z,\varepsilon)\subseteq A$, asi que $B(y_p,2^{-p-1})$ se cubre por un elemento de la colección $\mathcal{A}$. Contradicción. $\square$