# El vector más cercano al origen en un conjunto convexo cerrado no vacío

**1 Proposición** (sobre la norma de un promedio aritmético de dos vectores, identidad de Apolonius)**.** *Sea $H$ un espacio con producto interno y sean $a, b \in H$. Entonces*

$$\|a\|^2 + \|b\|^2 = 2\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2. \tag{1}$$

*También se cumplen las siguientes identidades:*

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 = \frac{\|a\|^2 + \|b\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|a-b\|^2, \tag{2}$$

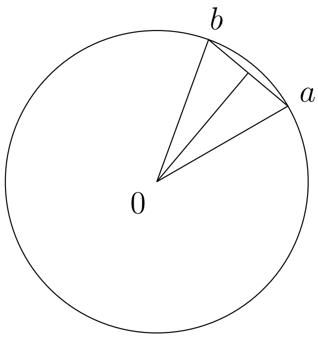
$$\|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2) - 4\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2. \tag{3}$$

*Demostración.* Recordamos la identidad de paralelogramo para los vectores $a$ y $b$:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Dividiendo entre 2 y usando la fórmula $\|(a-b)/2\| = \|a-b\|/2$ obtenemos (1). Las identidades (2) y (3) son otras formas equivalentes. □

**2 Ejercicio** (sobre la norma de la semisuma de dos vectores que tienen la misma norma)**.** Sea $H$ un espacio con producto interno y sean $a, b \in H$ tales que $\|a\| = \|b\|$ y $a \neq b$. Demostrar que $\left\|\frac{1}{2}(a+b)\right\| < \|a\|$.



**3 Definición.** Sea $V$ un espacio normado y sea $X \subseteq V$. Se dice que $X$ es *estrictamente convexo* si para cada $a, b$ en $X$ con $a \neq b$ y cada $\lambda$ en $(0,1)$ la combinación convexa $(1-\lambda)a + \lambda b$ pertenece al interior de $X$.

**4 Ejercicio** (la bola unitaria cerrada en un espacio con producto interno es estrictamente convexa)**.** Sea $H$ un espacio con producto interno y sean $a, b \in H$ tales que $\|a\| \leq 1$, $\|b\| \leq 1$. Demostrar que para cada $\lambda$ en $(0,1)$ tenemos

$$\|(1-\lambda)a + \lambda b\| < 1.$$

**5 Teorema.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y sea $X$ un subconjunto de $H$, convexo, cerrado y no vacío. Entonces en $X$ existe un único elemento más cercano al origen. En otras palabras, existe $a$ en $X$ tal que para cada $x$ en $X \setminus \{a\}$ se cumple la desigualdad $\|x\| > \|a\|$.*

*Demostración.* Sea

$$\alpha = \inf_{x \in X} \|x\|.$$

De la suposición $X \neq \varnothing$ se sigue que $\alpha < +\infty$. Elegimos una sucesión $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \alpha$. Entonces por (3)

$$\|v_m - v_n\|^2 = 4 \left\| \frac{v_m + v_n}{2} \right\|^2 - 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2).$$

Como $(v_m + v_n)/2 \in X$, obtenemos $\|(v_m + v_n)/2\| \geq \alpha$, luego

$$\|v_m - v_n\|^2 \leq 4\alpha^2 - 2(\|v_m\|^2 + \|v_n\|^2)$$

y

$$\lim_{m,n\to\infty} \|v_m - v_n\|^2 = 0.$$

Hemos demostrado que la sucesión $(v_n)_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Denotemos su límite por $a$. Como $X$ es cerrado, $a \in X$. Por la continuidad de la norma,

$$\|a\| = \lim_{n\to\infty} \|v_n\| = \alpha.$$

Sea $x \in X \setminus \{a\}$. Demostremos que $\|x\| > \alpha$. En efecto, como $X$ es convexo, tenemos $(x+a)/2 \in X$ y $\|(x+a)/2\| \geq \alpha$, luego por (2)

$$\|b\|^2 = 2 \left\| \frac{a+b}{2} \right\| - \|a\|^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2 \geq 2\alpha^2 - \alpha^2 + \frac{1}{2}\|a-b\|^2 > \alpha^2. \qquad \square$$

**6 Corolario** (existencia y unicidad del vector más cercano a un vector dado en un conjunto convexo cerrado no vacío)**.** *Sean $H$ un espacio de Hilbert, $S$ un subconjunto de $H$, convexo, cerrado y no vacío (en particular, cualquier subespacio cerrado de $H$ tiene estas propiedades), y sea $v \in H$. Entonces existe $u$ en $S$ tal que para cualquier $s$ en $S \setminus \{u\}$ se cumple la desigualdad $\|s - v\| > \|u - v\|$.*

*Demostración.* Definimos $f\colon H \to H$ mediante la regla $f(x) := x - v$. Obviamente la función $f$ es invertible y continua, y su inversa $(x \mapsto x + v)$ también es continua. Por eso $f$ es un homeomorfismo, y el conjunto $X := S - v = f(S)$ es cerrado. También es fácil ver que $X$ es convexo (es la imagen de un conjunto convexo bajo una función afín) y no vacío. Por el Teorema 5, existe $a$ en $X$ tal que para cada $x$ en $X \setminus \{a\}$ se cumple la desigualdad $\|x\| > \|a\|$. Pongamos $u := a + v$. Si $s \in S$, entonces $s - v \in X$ y $\|s - v\| > \|a\| = \|u - v\|$. □

Notemos que el Teorema 5 y su Corolario 6 se cumplen en algunos espacios de Banach, pero no en todos. Por ejemplo, se cumplen en $\ell^p(\mathbb{N})$ con $1 < p < +\infty$. En el siguiente ejemplo mostramos que el resultado del Corolario 6 no se cumple en $c_0(\mathbb{N})$.

**7 Ejemplo.** En $c_0(\mathbb{N})$ consideremos el siguiente funcional lineal:

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

Es fácil ver que $\varphi$ es acotado y $\|\varphi\| \le 1$. Más aún, $|\varphi(x)| < \|x\|$ para cada $x$ en $c_0(\mathbb{N}) \setminus \{0\}$. Denotemos por $S$ al núcleo de $\varphi$:

$$S := \ker(\varphi) = \left\{ x \in c_0(\mathbb{N})\colon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} = 0 \right\}.$$

Entonces $S$ es un subespacio cerrado de $c_0(\mathbb{N})$. Sea $v \in c_0(\mathbb{N}) \setminus S$, así que $\varphi(v) \neq 0$. Vamos a demostrar que en $S$ no existe elemento más cercano a $v$.

1. Para cada $n$ en $\mathbb{N}$ definimos

$$u^{(n)} := v - \varphi(v) \frac{1}{1 - 2^{-n}} \big( \underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots \big).$$

   Entonces $u^{(n)} \in c_0(\mathbb{N})$ y $\varphi(u^{(n)}) = 0$, así que $u^{(n)} \in S$. Más aún, se puede verificar que $\|u^{(n)} - v\|_\infty \to |\varphi(v)|$.

2. Para cada $s$ en $S$ tenemos que

$$|\varphi(v)| = |\varphi(v - s)| < \|v - s\|_\infty.$$

Concluimos que $d(v, S) = |\varphi(v)|$, pero no existe $s$ en $S$ tal que $\|v - s\|_\infty = |\varphi(v)|$.

**8 Ejercicio.** En el ejemplo anterior, demostrar que $\|u^{(n)} - v\|_\infty \to |\varphi(v)|$.