Conjuntos cerrados en espacios métricos

Objetivos. Estudiar propiedades elementales de conjuntos cerrados en espacios métricos.

Prerrequisitos. Propiedades de conjuntos abiertos en espacios métricos.

1 Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $F \subseteq X$ se llama cerrado en X si $X \setminus F \in \tau_d$.

2 Proposición. *Denotemos por α_d al conjunto de los subconjuntos cerrados de X.*

1. *Si $\beta \subseteq \alpha_d$, entonces $\cap\beta \in \alpha_d$.*

2. *Si $F, G \in \alpha_d$, entonces $F \cup G \in \alpha_d$.*

3. *$\varnothing, X \in \alpha_d$.*

Demostración. La idea de la demostración es aplicar propiedades de τ_d y leyes de De Morgan. Demostremos 1. Sea $\beta \subseteq \alpha_d$. Pongamos $\sigma := \{A \subseteq X\colon\ X \setminus A \in \beta\}$. Entonces $\sigma \subseteq \tau_d$. Por las propiedades de τ_d, concluimos que $\cup\sigma \in \tau_d$. Luego $X \setminus (\cup\sigma) \in \alpha_d$. Mostremos que $X \setminus (\cup\sigma) = \cap\beta$. En efecto,

$$\begin{aligned} x \in X \setminus (\cup\sigma) \quad &\iff \quad \neg(\exists A \in \sigma \quad x \in A) \quad \iff \quad \forall A \in \sigma \quad x \notin A \\ &\iff \quad \forall A \in \sigma \quad x \in X \setminus A \quad \iff \quad \forall F \in \beta \quad x \in F \\ &\iff \quad x \in \cap\beta. \end{aligned}$$

□

3 Ejercicio. Pongamos $X := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Definimos $f\colon X \to [0, 1]$ como

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & n \in \mathbb{N}; \\ 1, & n = \infty. \end{cases}$$

Definimos $d\colon X^2 \to [0, +\infty)$ mediante la regla

$$d(m, n) := |f(m) - f(n)|.$$

Encontrar los conjuntos cerrados en (X, d).