Caracteres del grupo $\mathbb{R}$ y del grupo $\mathbb{T}$

Diana Marcela Erazo Borja, Egor Maximenko

Seminario "Teoría de representaciones en análisis"

6 de octubre de 2025

Objetivos

- Mostrar que todos los caracteres del grupo $\mathbb{R}$ son de la forma

$$\varkappa_\xi(x) \coloneqq \exp(2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x) \qquad (x, \xi \in \mathbb{R}).$$

- Mostrar que todos los caracteres del grupo $\mathbb{T} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| = 1\}$ son de la forma

$$\omega_m(t) \coloneqq t^m \qquad (t \in \mathbb{T},\ m \in \mathbb{Z}).$$

- Describir los grupos duales de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$.

Prerrequisitos

- Caracteres de un grupo abeliano localmente compacto.
- El grupo dual de un grupo abeliano localmente compacto.
- Propiedades básicas de la función exponencial compleja.
- Teorema fundamental del cálculo.
- La ecuación diferencial $f'(x) = \alpha f(x)$.

Plan

Grupo abeliano localmente compacto

$(G, +, \tau)$ se llama **grupo abeliano localmente compacto**, si:

- $(G, +)$ es un grupo abeliano.
- (G, τ) es un espacio topológico localmente compacto (Hausdorff).
- Las operaciones $(x, y) \mapsto x + y$ y $x \mapsto -x$ son continuas.

Nota. Un espacio topológico se dice localmente compacto si

$$(\forall a \in G) \quad (\exists V \in \tau) \quad (a \in V \ \wedge \ \text{clos}(V) \text{ es compacto}).$$

Caracteres de un GALC

Un caracter de un GALC es un homomorfismo continuo $G \to \mathbb{T}$.

Es decir, si φ es un caracter de G, entonces $\varphi : G \to \mathbb{T}$ es una función continua y satisface que para todo $a, b \in G$,

$$\varphi(a + b) = \varphi(a)\varphi(b).$$

El grupo dual de un GALC

Sea G un GALC.

El dual de G se denota por $\widehat{G}$ y se define como

$\widehat{G} :=$ el conjunto de los caracteres de G, con las operaciones punto a punto:

$$(\varphi_1\varphi_2)(a) = \varphi_1(a)\varphi_2(a).$$

Es fácil ver que $\widehat{G}$ es un grupo abeliano.

Repaso: la ecuación diferencial para la función exponencial

Proposición

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Existe una única función derivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f'(x) = \alpha f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

y

$$f(0) = \beta.$$

Esta función es

$$f(x) = \beta\, \mathrm{e}^{\alpha x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Idea de demostración de la unicidad

Considerar

$$q(x) := f(x)\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,.$$

Mostrar que $q'(x) = 0$ y concluir que q es una constante.

Repaso: el teorema fundamental del cálculo, para funciones continuas complejas

Proposición

Sea $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Definimos $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$g(y) := \int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Entonces, para cada y en $\mathbb{R}$,

$$g'(y) = f(y).$$

Recordemos que si $y < 0$,

$$\int_0^y f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_y^0 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Repaso: la función exponencial imaginaria

Recordemos algunas propiedades de la función

$$x \mapsto e^{i\,x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Propiedad de homomorfismo:

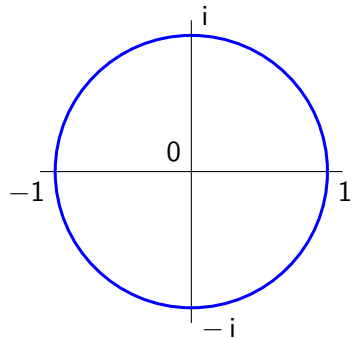
$$e^{i(x+y)} = e^{i\,x}\, e^{i\,y} \qquad (x, y \in \mathbb{R}).$$

La imagen:

$$\{e^{i\,x} :\ x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{T}.$$

El núcleo:

$$e^{i\,x} = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in 2\pi\mathbb{Z}.$$



Plan

Fórmula para los caracteres del grupo $\mathbb{R}$

Para cada ξ en $\mathbb{R}$, definimos $\varkappa_\xi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\varkappa_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,.$$

Algunos autores prefieren trabajar sin el coeficiente 2π.

Proposición

$\varkappa_\xi \in \widehat{\mathbb{R}}$.

Demostración

$$\varkappa_\xi(x) := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,.$$

La continuidad se sigue de la continuidad de la función exponencial.

$\varkappa_\xi$ es un homomorfismo:

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\varkappa_\xi(x+y) = e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi(x+y)} = e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x} e^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi y} = \varkappa_\xi(x)\varkappa_\xi(y).$$

Lema sobre $\exp(ax) = 1$

Lema

Sea $a \in \mathbb{C}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^{ax} = 1.$$

Entonces, $a = 0$.

Lema sobre $\exp(ax) = 1$

Lema

Sea $a \in \mathbb{C}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^{ax} = 1.$$

Entonces, $a = 0$.

Demostración. Derivamos ambos lados de la igualdad respecto a la variable x:

$$a\, e^{ax} = 0.$$

Concluimos que $a = 0$.

La correspondencia $\xi \mapsto \varkappa_\xi$ es inyectiva

Proposición

Si $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\varkappa_\xi = \varkappa_\eta,$$

entonces $\xi = \eta$.

Demostración

Sean $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ tal que $\varkappa_\xi = \varkappa_\eta$.

Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi} = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\eta}\,.$$

Por lo tanto,

$$e^{2\pi\,\mathrm{i}(\xi-\eta)x} = 1, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo con el lema anterior, se concluye que $\xi = \eta$.

Lema sobre la integral con límite superior variable de un caracter de $\mathbb{R}$

Lema

Sea $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$. Entonces, existe $a > 0$ tal que

$$\int_0^a \gamma(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

Primera demostración del lema (derivamos la integral)

Definimos $J\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$J(y) \coloneqq \int_0^y \gamma(x)\,\mathrm{d}x.$$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $J(y) = 0$ para cada $y > 0$.
Derivamos respecto al parámetro y, aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$0 = J'(y) = \gamma(y), \quad \text{para todo } y > 0.$$

Esto no es posible porque

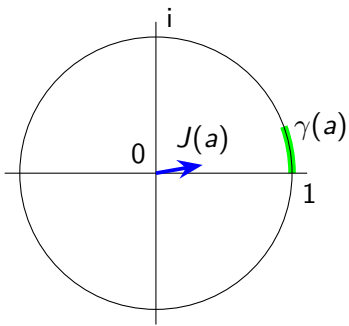
$$|\gamma(y)| = 1.$$

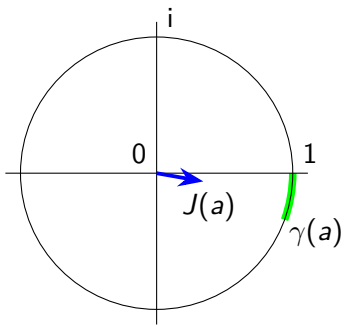
Idea intuitiva de la segunda demostración del lema

Definimos $J(a) := \int_0^a \gamma(x)\,\mathrm{d}x = a \cdot$ (el valor promedio de γ en $[0, a]$).

Como γ es continua y $\gamma(0) = 1$, este valor promedio es cercano a 1, si a es pequeño.

Los siguientes dos dibujos muestran las situaciones posibles.





Segunda demostración del lema (usamos la continuidad de γ en 0)

Como γ es continua y $\gamma(0) = 1$, encontramos $a > 0$ tal que

$$\forall x \in (0, a) \qquad |\gamma(x) - 1| < \frac{1}{2}.$$

Mostramos que esta integral $J(a)$ es cercana al número a:

$$|J(a) - a| = \left| \int_0^a \gamma(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a \mathrm{d}x \right| = \left| \int_0^a (\gamma(x) - 1)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_0^a |\gamma(x) - 1|\,\mathrm{d}x \leq \frac{a}{2}.$$

Por la desigualdad inversa del triángulo,

$$|J(a)| = |a - (a - J(a))| \geq a - |a - J(a)| \geq a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

La forma general de los caracteres de $\mathbb{R}$

Teorema

Para cada γ en $\widehat{\mathbb{R}}$, existe ξ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\gamma = \varkappa_\xi.$$

Demostración: inicio

Sea $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$. Encontramos $a > 0$ tal que $J(a) \neq 0$.

Para cada x en $\mathbb{R}$, consideramos la siguiente expresión:

$$J(x+a) - J(x) = \int_0^{x+a} \gamma(y)\,\mathrm{d}y - \int_0^{x} \gamma(y)\,\mathrm{d}y = \int_x^{x+a} \gamma(y)\,\mathrm{d}y.$$

Hacemos el cambio de variable $u = y - x$:

$$J(x+a) - J(x) = \int_0^{a} \gamma(x+u)\,\mathrm{d}u.$$

De manera equivalente, hemos usado el hecho que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones.

Demostración: γ es derivable

Usamos la suposición de que γ es un caracter:

$$J(x+a) - J(x) = \int_0^a \gamma(x+u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a \gamma(x)\gamma(u)\,\mathrm{d}u = \gamma(x)\int_0^a \gamma(u)\,\mathrm{d}u = \gamma(x)J(a).$$

De aquí,

$$\gamma(x) = \frac{J(x+a) - J(x)}{J(a)}.$$

El lado derecho es una función derivable. Concluimos que γ es derivable:

$$\gamma'(x) = \frac{J'(x+a) - J'(x)}{J(a)} = \frac{\gamma(x+a) - \gamma(x)}{J(a)} = \frac{\gamma(x)(\gamma(a)-1)}{J(a)}.$$

Demostración: una ecuación diferencial para γ

Definimos

$$\alpha := \frac{\gamma(a) - 1}{J(a)}.$$

A partir de la igualdad anterior, se tiene la siguiente ecuación diferencial

$$\gamma'(x) = \alpha\, \gamma(x),$$

con la condición inicial

$$\gamma(0) = 1.$$

La solución de esta ecuación es

$$\gamma(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}.$$

Demostración: otra deducción de la ecuación diferencial para γ

Ya sabemos que γ es derivable. Usamos el hecho que γ es un caracter:

$$\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

Derivamos ambos lados respecto y:

$$\gamma'(x+y) = \gamma(x)\gamma'(y).$$

Ahora sustituimos $y = 0$ y ponemos $\alpha := \gamma'(0)$:

$$\gamma'(x) = \alpha\gamma(x).$$

Igual que antes, la solución es $\gamma(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$.

Demostración: final

Hemos mostrado que

$$\gamma(x) = \mathrm{e}^{\alpha x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Note que para cada x en $\mathbb{R}$,

$$1 = |\gamma(x)| = |\,\mathrm{e}^{\alpha x}\,| = |\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\alpha)x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\alpha)x}\,| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\alpha)x}\,.$$

Lo anterior se cumple solamente si $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$.

Definimos $\xi := \frac{\alpha}{2\pi\,\mathrm{i}}$. Entonces, $\xi \in \mathbb{R}$.

Para todo x en $\mathbb{R}$,

$$\gamma(x) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\,.$$

Descripción del grupo $\widehat{\mathbb{R}}$

Definimos $K\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,

$$K(\xi) \coloneqq \varkappa_\xi.$$

Descripción del grupo $\widehat{\mathbb{R}}$

Definimos $K\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,

$$K(\xi) := \varkappa_\xi.$$

Teorema

K es un isomorfismo de grupos.

Descripción del grupo $\widehat{\mathbb{R}}$

Definimos $K\colon \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$,

$$K(\xi) := \varkappa_\xi.$$

Teorema

K es un isomorfismo de grupos.

Ejercicio: demostrar que

$$K(\xi + \eta) = K(\xi)K(\eta).$$

Ya hemos demostrado que K es inyectiva y sobre.

Plan

Definición de ω_m

Dado m en $\mathbb{Z}$, definimos $\omega_m \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$,

$$\omega_m(t) \coloneqq t^m.$$

Proposición

$\omega_m \in \widehat{\mathbb{T}}$.

Ejercicio: demostrar la proposición.

Lema sobre $t^p = 1$

Lema

Sea $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\forall t \in \mathbb{T} \qquad t^p = 1.$$

Entonces, $p = 0$.

Lema sobre $t^p = 1$

Lema

Sea $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\forall t \in \mathbb{T} \qquad t^p = 1.$$

Entonces, $p = 0$.

Demostración. Supongamos que $p \neq 0$ y sea $t = e^{\frac{i\pi}{2p}} \in \mathbb{T}$. Luego,

$$t^p \neq 1.$$

Concluimos que $p = 0$.

La correspondencia $m \mapsto \omega_m$ es inyectiva

Proposición

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ que satisfacen

$$\omega_m = \omega_n.$$

Entonces $m = n$.

La correspondencia $m \mapsto \omega_m$ es inyectiva

Proposición

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ que satisfacen

$$\omega_m = \omega_n.$$

Entonces $m = n$.

Demostración. Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $\omega_m = \omega_n$.
Entonces, para todo t en $\mathbb{T}$, se cumple que $t^m = t^n$, lo que implica que

$$t^{m-n} = 1.$$

Esta igualdad es válida para todo t en $\mathbb{T}$. Por el lema, $m - n = 0$. □

La correspondencia $m \mapsto \omega_m$ es sobre

Teorema

Para cada ψ en $\widehat{\mathbb{T}}$, existe m en $\mathbb{Z}$ tal que

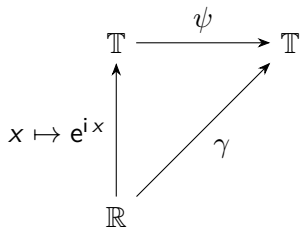
$$\psi = \omega_m.$$

Demostración, inicio

Sea $\psi \in \widehat{\mathbb{T}}$. Definimos $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$,

$$\gamma(x) \coloneqq \psi(e^{i\,x}).$$

Entonces, $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$.



Luego, existe un único ξ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\psi(e^{i\,x}) = e^{2\pi\,i\,\xi x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Demostración, determinamos una forma especial de ξ

Hemos mostrado que

$$\psi(e^{i\,x}) = e^{2\pi\,i\,\xi x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Sea $x = 2\pi$. Entonces,

$$1 = \psi(1) = \psi(e^{2\pi\,i}) = e^{(2\pi)^2\xi\,i}.$$

Por la propiedad periódica, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $(2\pi)^2\xi = 2\pi k$, esto es

$$\xi = \frac{k}{2\pi}.$$

Notemos que k se determina de manera única porque ξ ya está determinado y $k = 2\pi\xi$.

Demostración, final

Con esto tenemos que

$$\psi(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}) = (e^{\mathrm{i}\,x})^k \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Recordemos que cada t en $\mathbb{T}$ se puede representar como $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ con algún x en $\mathbb{R}$.

Finalmente, se cumple que para todo $t \in \mathbb{T}$,

$$\psi(t) = t^k.$$

Descripción del grupo $\widehat{\mathbb{T}}$

Definimos $\Omega\colon \mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{T}}$,

$$\Omega(m) \coloneqq \omega_m.$$

Descripción del grupo $\widehat{\mathbb{T}}$

Definimos $\Omega\colon \mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{T}}$,

$$\Omega(m) \coloneqq \omega_m.$$

Teorema

Ω es un isomorfismo de grupos.

Descripción del grupo $\widehat{\mathbb{T}}$

Definimos $\Omega\colon \mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{T}}$,

$$\Omega(m) \coloneqq \omega_m.$$

Teorema

Ω es un isomorfismo de grupos.

Ejercicio: demostrar que

$$\Omega(m+n) = \Omega(m)\Omega(n).$$

Ya hemos demostrado que Ω es inyectiva y sobre.

Nota: además, K y Ω son homeomorfismos

El grupo dual $\widehat{G}$ se considera con la "topología compacto-abierta".

Ralph H. Fox (1945):
On topologies for function spaces.
https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1945-08370-0

Se puede demostrar que K y Ω son homeomorfismos.