El espacio de caracteres de un álgebra de Banach con identidad

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e.

1 Definición. Denotamos por $\Omega(\mathcal{A})$ el conjunto de todos los caracteres de $\mathcal{A}$.

2 Repaso. Ya sabemos que $\Omega(\mathcal{A})$ es un subconjunto de la esfera unitaria del espacio dual $\mathcal{A}^*$:

$$\Omega(\mathcal{A}) \subseteq \big\{ f \in \mathcal{A}^* \colon \ \|f\| = 1 \big\}.$$

3 Proposición. $\Omega(\mathcal{A})$ *es un subconjunto cerrado de* $\mathcal{A}^*$ *en la topología débil-*$*$.

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{A}^*$ tal que $f \in \mathrm{cl}(\Omega(\mathcal{A}))$. Elegimos un conjunto dirigido $(J, \succeq)$ y una red $s \colon J \to \Omega(\mathcal{A})$ tal que $s \xrightarrow[J]{w} f$.

Mostremos que f es multilicativo. Dados a, b en $\mathcal{A}$, para cada j en J tenemos que

$$s_j(ab) = s_j(a) s_j(b).$$

La suposición $s \xrightarrow[J]{w} f$ implica que para cada x en $\mathcal{A}$,

$$f(x) = \lim_{j \in J} s_j(x).$$

En particular, lo tenemos para los puntos a, b y ab. Luego

$$f(ab) = \lim_{j \in J} s_j(ab) = \lim_{j \in J} \big(s_j(a) s_j(b) \big) = f(a) f(b).$$

Mostremos que $f(e) = 1$. En efecto, para cada j en J tenemos que $s_j(e) = 1$. Usando la convergencia en el punto e, concluimos que $f(e) = 1$.

Hemos demostrado que $f \in \Omega(\mathcal{A})$. □

4 Definición. La topología en $\Omega(\mathcal{A})$ se define como la topología inducida por la tópología débil-* de $\mathcal{A}^*$.

5 Definición. Si φ en $\Omega(\mathcal{A})$, $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$, pongamos

$$V_{\varphi,(a_1,\ldots,a_m),\varepsilon} \coloneqq \big\{\psi \in \Omega(\mathcal{A}) \colon \quad \forall k \in \{1,\ldots,m\} \quad |\psi(a_k) - \varphi(a_k)| < \varepsilon\big\}.$$

6 Proposición (una base local de un caracter)**.** *Sea $\varphi \in \Omega(\mathcal{A})$.*

- *Los conjuntos de la forma $V_{\varphi,(a_1,\ldots,a_m),\varepsilon}$ son vecindades abiertas de φ.*
- *Dada una vecindad abierta A de φ, existen $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{A}$ y $\varepsilon > 0$, tales que*

$$V_{\varphi,(a_1,\ldots,a_m),\varepsilon} \subseteq \mathcal{A}.$$

7 Proposición. $\Omega(\mathcal{A})$ *es un espacio compacto de Hausdorff.*

Demostración. Sea X la esfera unitaria del espacio $\mathcal{A}^*$:

$$S \coloneqq \big\{f \in V^* \colon \ \|f\| \leq 1\big\}.$$

Por el teorema de Alaoglu, la bola unitaria cerrada de $\mathcal{A}^*$ y la esfera S, consideradas con la topología débil-*, son espacios compactos.

Ya sabemos que $\Omega(\mathcal{A}) \subseteq S$. Por la Proposición 3, $\Omega(\mathcal{A})$ es un subconjunto cerrado de $\mathcal{A}^*$.

Luego $\Omega(\mathcal{A})$ es un subconjunto cerrado de S. Por consecuencia, $\Omega(\mathcal{A})$ es compacto. □