El espacio de caracteres de un álgebra de Banach con identidad generada por un elemento

Agradezco a Gamaliel Yafte Téllez Sánchez por exponer varias ideas de este tema.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach con identidad e. Denotemos por $\mathcal{P}$ al conjunto de las funciones polinomiales:

$$\mathcal{P} \coloneqq \left\{ f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}\colon \quad \exists m \in \mathbb{N}_0 \quad \exists c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k \right\}.$$

Sea $a \in \mathcal{A}$. Supongamos que $\mathcal{A}$, como álgebra de Banach con identidad, está generada por a, esto es, el conjunto $\{f(a)\colon\ f \in \mathcal{P}\}$ es denso en $\mathcal{A}$.

1 Proposición. *Existe un homeomorfismo* $\Phi\colon \operatorname{Sp}(a) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ *tal que*

$$\Phi(z)(a) = z \qquad (z \in \operatorname{Sp}(a)).$$

Demostración. Recordemos que

$$\operatorname{Sp}(a) = \{\varphi(a)\colon\ \varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}. \tag{1}$$

En particular, si $\varphi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, entonces $\varphi(a) \in \operatorname{Sp}(a)$. Definimos $\Psi\colon \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \operatorname{Sp}(a)$ como

$$\Psi(\varphi) \coloneqq \varphi(a).$$

Por (1), la función Ψ es suprayectiva. Por la definición de la topología en $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, la función Ψ es continua. Mostremos que Ψ es inyectiva.

Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ tales que $\Psi(\varphi) = \Psi(\psi)$, esto es, $\varphi(a) = \psi(a)$. Entonces para cada f en $\mathcal{P}$, si f es de la forma

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k,$$

obtenemos

$$\varphi(f(a)) = \sum_{k=0}^{m} c_k \varphi(a)^k = \sum_{k=0}^{m} c_k \psi(a)^k = \psi(f(a)).$$

Esto significa que las funciones φ y ψ coinciden en el conjunto $\{f(a)\colon\ a \in \mathcal{P}\}$. Como este conjunto es denso en $\mathcal{A}$ y las funciones φ y ψ son continuas, concluimos que $\varphi = \psi$.

Hemos mostrado Ψ es un homeomorfismo. Poniendo $\Phi = \Psi^{-1}$ obtenemos la función requerida. $\square$

2 Proposición. *Sea $b \in \mathcal{A}$. Entonces la función $\Gamma(b) \circ \Phi$ se aproxima uniformemente en* $\operatorname{Sp}(a)$ *por funciones polinomiales.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ encontramos $f \in \mathcal{P}$ tal que $\|f(a) - b\| < \varepsilon$. Para cada z en $\operatorname{Sp}(a)$ pongamos $\varphi_z := \Phi(z)$. Entonces $\varphi_z \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ y

$$\begin{aligned}|(\Gamma(b) \circ \Phi - f)(z)| &= |\Gamma(b)(\varphi_z) - f(z)| = |\varphi_z(b) - f(\varphi_z(a))| \\ &= |\varphi_z(b) - \varphi_z(f(a))| \le \|b - f(a)\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

De aquí se sigue que $\sup_{z\in K} |(\Gamma(b) \circ \Phi - f)(z)| \le \varepsilon$. $\square$

3 Proposición. *Sean K un subconjunto compacto, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus K$, y q_λ es la función racional*

$$q_\lambda(z) := \frac{1}{\lambda - z}.$$

Supongamos que q_λ se aproxima por funciones polinomiales de manera uniforme en K, esto es, para cada $\varepsilon > 0$ existe f en $\mathcal{P}$ tal que

$$\sup_{z\in K} |f(z) - q_\lambda(z)| < \varepsilon.$$

Entonces λ pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$.

Demostración. Sea Ω_∞ la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ y sea Ω_1 la unión de las componentes acotadas de $\mathbb{C} \setminus K$. Pongamos $K_1 := K \cup \Omega_1$. En otras palabras, K_1 es la unión del conjunto K con sus hoyos. Entonces $\operatorname{fr}(K_1) \subseteq \operatorname{fr}(K) \subseteq K$.

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\lambda \in \Omega_1$. Sea $M = \sup_{z\in K} |z|$. Encontramos f en $\mathcal{P}$ tal que

$$\sup_{z\in K} |f(z) - q_\lambda(z)| < \frac{1}{2M}.$$

Luego, por el principio de máximo,

$$\sup_{z\in K_1} |f(z)(z - \lambda) - 1| = \sup_{z\in \operatorname{fr}(K_1)} |f(z)(z - \lambda) - 1| = \sup_{z\in K} |(f(z) - q_\lambda)(z - \lambda)| < \frac{1}{2}.$$

En particular,

$$1 = |f(\lambda)(\lambda - \lambda) - 1| < \frac{1}{2}.$$

La contradicción obtenida muestra que λ no puede pertenecer a Ω_1. $\square$

4 Proposición. *El conjunto* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(a)$ *es conexo.*

Demostración. Pongamos $K := \mathrm{Sp}(a)$. Dado λ en $\mathbb{C} \setminus K$ consideremos la función

$$q_\lambda(z) := \frac{1}{\lambda - z}.$$

Pongamos

$$b := q_\lambda(a) = (\lambda e - a)^{-1} = R_a(\lambda).$$

Entonces para cada z en K

$$\Gamma(b)(\Phi(z)) = \Phi(z)((\lambda e - a)^{-1}) = \frac{1}{\lambda - \Phi(z)(a)} = \frac{1}{\lambda - z},$$

esto es, $\Gamma(b) \circ \Phi$ coincide con la restricción de la función racional q_λ al conjunto K. Como $b \in \mathcal{A}$, por la Proposición 2 la función q_λ se aproxima de manera uniforme en K por funciones polinomiales. Por la Proposición 3 esto implica que λ pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$. Por lo tanto, el conjunto $\mathbb{C} \setminus K$ coincide con su componente no acotada y es conexo. $\square$

5 Problema. Pongamos $K = \mathrm{Sp}(a)$, $D = \mathrm{int}(K)$. Sea $f \in C(K)$ tal que $f|_D \in H(D)$. Determine si debe existir b en $\mathcal{A}$ tal que $\Gamma(b) \circ \Phi = f$.

Referencias

[1] levap (user of the forum math.stackexchange.com), answer to the question "$\sigma(x)$ has no hole in the algebra of polynomials". `https://math.stackexchange.com/questions/249867/sigmax-has-no-hole-in-the-algebra-of-polynomials`.