# Productos cartesianos de conjuntos

En estos temas de análisis real usamos la palabra "rectángulos" hablando de los productos cartesianos de la forma $A \times B$, aunque $A$ y $B$ son conjuntos arbitrarios y no necesariamente son intervalos.

**1 Proposición** (criterio de vaciedad de un rectángulo)**.** *Sean $A, B$ dos conjuntos. Entonces*

$$A \times B = \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = \emptyset \quad \vee \quad B = \emptyset.$$

*Demostración.* Razonamos de manera contrapositiva. Demostremos la siguiente afirmación:

$$A \times B \neq \emptyset \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \neq \emptyset \quad \wedge \quad B \neq \emptyset.$$

$\Rightarrow$. Supongamos que $A \times B \neq \emptyset$. Sea $(x, y) \in A \times B$. Entonces $x \in A$, $y \in B$, así que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$. Supongamos que $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$. Sean $x \in A$, $y \in B$. Entonces $(x, y) \in A \times B$, así que $A \times B \neq \emptyset$. $\square$

**2 Proposición** (criterio de contención de dos rectángulos no vacíos)**.** *Sean $A_1, A_2, B_1, B_2$ algunos conjuntos, $E_1 \coloneqq A_1 \times B_1$, $E_2 \coloneqq A_2 \times B_2$. Supongamos que*

$$E_1 \neq \emptyset, \qquad E_2 \neq \emptyset.$$

*Entonces*

$$E_1 \subseteq E_2 \quad \Longleftrightarrow \quad A_1 \subseteq A_2 \quad \wedge \quad B_1 \subseteq B_2.$$

*Demostración.* $\Rightarrow$. Supongamos que $E_1 \subseteq E_2$. Demostremos que $A_1 \subseteq A_2$. Sea $a \in A_1$. Usando la suposición que $E_1 \neq \emptyset$ elegimos $b \in B_1$. Entonces $(a, b) \in E_1$. Luego $(a, b) \in E_2$. Finalmente, concluimos que $a \in A_2$.

De manera similar se puede demostrar que $B_1 \subseteq B_2$.

$\Leftarrow$. Supongamos que $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2$. Demostremos que $E_1 \subseteq E_2$. Sea $(a, b) \in E_1$. Entonces $a \in A_1$, $b \in B_1$. Luego $a \in A_2$, $b \in B_2$, lo cual significa que $(a, b) \in E_2$. $\square$

**3 Proposición** (criterio de igualdad de dos rectángulos no vacíos)**.** *Sean $A_1, A_2, B_1, B_2$ algunos conjuntos, $E_1 \coloneqq A_1 \times B_1$, $E_2 \coloneqq A_2 \times B_2$. Supongamos que*

$$E_1 \neq \emptyset, \qquad E_2 \neq \emptyset.$$

*Entonces*

$$E_1 = E_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Big(A_1 = A_2 \quad \wedge \quad B_1 = B_2\Big).$$

*Demostración.* Demostremos solamente la implicación $\Rightarrow$. Como $E_1 \subseteq E_2$ y $E_2 \subseteq E_1$, por la Proposición 2 obtenemos

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_1, \qquad B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_1. \qquad \square$$

**4 Proposición** (fórmula para la intersección de dos rectángulos)**.** *Sean* $A_1, A_2, B_1, B_2$ *algunos conjuntos. Entonces*

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
(a, b) \in &(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\
&\iff \quad (a, b) \in A_1 \times B_1 \quad \wedge \quad (a, b) \in A_2 \times B_2 \\
&\iff \quad \Big((a \in A_1) \quad \wedge \quad (b \in B_1)\Big) \quad \wedge \quad \Big((a \in A_2) \quad \wedge \quad (b \in B_2)\Big) \\
&\iff \quad \Big((a \in A_1) \quad \wedge \quad (a \in A_2)\Big) \quad \wedge \quad \Big((b \in B_1) \quad \wedge \quad (b \in B_2)\Big) \\
&\iff \quad a \in A_1 \cap A_2 \quad \wedge \quad b \in B_1 \cap B_2 \\
&\iff \quad (a, b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).
\end{aligned}$$

Además de la definición del producto cartesiano, hemos usado la propiedad asociativa y conmutativa de la operación lógica $\wedge$. $\square$

**5 Ejercicio** (¿cuándo un rectángulo es una unión disjunta de dos rectángulos?)**.** Sean $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ algunos conjuntos,

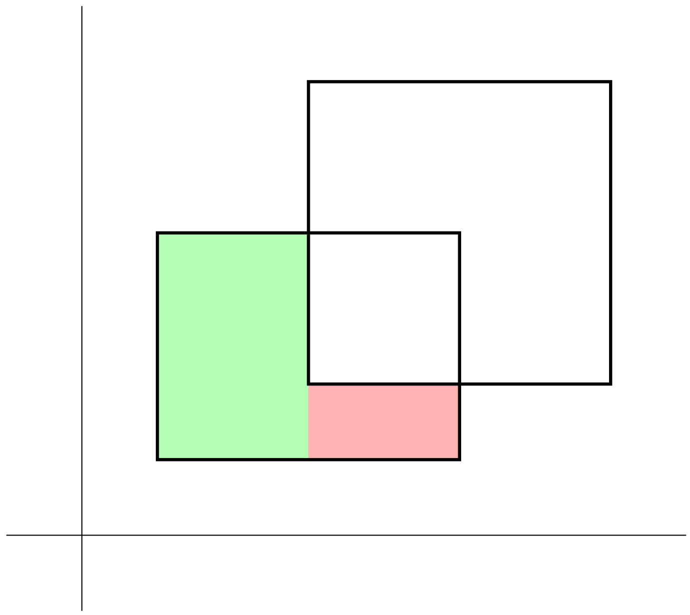
$$E_1 \coloneqq A_1 \times B_1, \qquad E_2 \coloneqq A_2 \times B_2, \qquad E_3 \coloneqq A_3 \times B_3.$$

Supongamos que

$$E_1 \neq \emptyset, \qquad E_2 \neq \emptyset, \qquad E_3 \neq \emptyset.$$

Encontrar una condición necesaria y suficiente para que

$$E_1 \cup E_2 = E_3 \quad \wedge \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset.$$



**6 Proposición** (fórmula para la diferencia de dos rectángulos)**.** *Sean $A_1, A_2, B_1, B_2$ algunos conjuntos. Entonces*

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \big((A_1 \setminus A_2) \times B_1\big) \cup \big((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)\big). \tag{1}$$

*Además,*

$$\big((A_1 \setminus A_2) \times B_1\big) \cap \big((A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2)\big) = \emptyset. \tag{2}$$

*Demostración.* Denotemos por $R_1, R_2, R_3, R_4$ a los rectángulos que participan en la fórmula (1):

$$R_1 \coloneqq A_1 \times B_1, \qquad R_2 \coloneqq A_2 \times B_2,$$
$$R_3 \coloneqq (A_1 \setminus A_2) \times B_1, \qquad R_4 \coloneqq (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \setminus B_2).$$

Es fácil ver que

$$R_3 \cap R_4 = \emptyset, \qquad R_3 \subseteq R_1 \setminus R_2, \qquad R_4 \subseteq R_1 \setminus R_2.$$

De aquí sale (2) y la contención $\supseteq$ en (1).

Demostremos la contención $\subseteq$ en (1). Sea $(a, b) \in R_1 \setminus R_2$. La condición $(a, b) \in R_1$ significa que $a \in A_1$ y $b \in B_1$. La condición $(a, b) \notin R_2$ significa que

$$a \notin A_2 \quad \vee \quad b \notin B_2. \tag{3}$$

Consideremos dos casos posibles: 1) $a \notin A_2$, 2) $a \in A_2$.

Caso I. $a \notin A_2$. Entonces $a \in A_1 \setminus A_2$. Además, $b \in B_1$. Luego $(a, b) \in R_3$.

Caso II. $a \in A_2$. Luego, por (3), obtenemos que $b \notin B_2$. Esto significa que $a \in A_1 \cap A_2$ y $b \in B_1 \setminus B_2$, es decir, $(a, b) \in R_4$.

En ambos casos, $(a, b) \in R_3 \cup R_4$. $\square$

**7 Observación.** También es válida la fórmula

$$(A_1 \times B_1) \setminus (A_2 \times B_2) = \big((A_1 \setminus A_2) \times B_1\big) \cup \big(A_1 \times (B_1 \setminus B_2)\big), \tag{4}$$

pero los rectángulos en el lado derecho de (4), en general, no son disjuntos.