Conjuntos acotados en espacios métricos

(un tema de análisis)

Egor Maximenko,

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

1 de febrero de 2022

Objetivo.

Estudiar varias descripciones equivalentes de conjuntos acotados en espacios métricos.

Prerrequisitos.

Espacios métricos, bolas en espacios métricos.

El diámetro de un conjunto

En este tema suponemos que (X, d) es un espacio métrico.

Definición

Sea $Y \subseteq X$.

$$\operatorname{diam}(Y) := \sup\{d(x,y) : \ x, y \in Y\}.$$

En el caso $Y = \emptyset$ se pone $\operatorname{diam}(Y) := 0$.

Ejemplo: el diámetro de un intervalo con extremos finitos

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Entonces

$$\operatorname{diam}([a, b]) = b - a.$$

Ejemplo: el diámetro de un intervalo con extremos finitos

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Entonces
$$\operatorname{diam}([a, b]) = b - a.$$

Dejamos demostraciones de algunas proposiciones como ejercicios.

Ejemplo: una cota superior para el diámetro de una bola

Proposición

Sean $a \in X$, $r > 0$. Entonces

$$\operatorname{diam}(B(a, r)) \leq 2r.$$

Ejercicio. Construir un ejemplo tal que

$$\operatorname{diam}(B(a, r)) < 2r.$$

Hay que encontrar X, $a \in X$, $r > 0$.

Monotonía del diámetro

Proposición

Sean $Y, Z \subseteq X$ tales que
$$Z \subseteq Y.$$

Entonces
$$\operatorname{diam}(Z) \leq \operatorname{diam}(Y).$$

Conjuntos acotados

Definición

Sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es acotado si $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$.

Conjuntos acotados

Definición

Sea $Y \subseteq X$. Se dice que Y es acotado si $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$.

Ejercicio. Sea $Y \subseteq X$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$;

(b) existe C en $[0, +\infty)$ tal que

$$\forall a, b \in Y \qquad d(a, b) \leq C.$$

Subconjuntos de conjuntos acotados son acotados

Proposición

Sea X un espacio métrico y sean $Y, Z \subseteq X$ tales que Y es acotado y $Z \subseteq Y$.

Entonces Z es acotado.

Criterio de conjunto acotado en términos de bolas

Proposición

Sea $Y \subseteq X$ y sea $a \in X$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$.

(b) existe $r > 0$ tal que $Y \subseteq B(a, r)$.

Criterio de conjunto acotado en términos de bolas, otra forma

Proposición

Sea $Y \subseteq X$ tal que $Y \neq \emptyset$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\operatorname{diam}(Y) < +\infty$.

(b) existen a en Y y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a, r)$.

(c) existen a en X y $r > 0$ tales que $Y \subseteq B(a, r)$.

La unión de dos conjuntos acotados es un conjunto acotado

Proposición

Sean Y, Z subconjuntos acotados de X. Entonces $Y \cup Z$ es acotado.

Idea de demostración.

Es fácil demostrar la proposición, si Y o Z es vacío.

Idea de demostración.

Es fácil demostrar la proposición, si Y o Z es vacío.

Supongamos que $Y \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Elegimos $a \in Y$, $b \in Z$.

Idea de demostración.

Es fácil demostrar la proposición, si Y o Z es vacío.

Supongamos que $Y \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Elegimos $a \in Y$, $b \in Z$.

Dados $p, q \in Y \cup Z$, tenemos cuatro casos posibles.

Idea de demostración.

Es fácil demostrar la proposición, si Y o Z es vacío.

Supongamos que $Y \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Elegimos $a \in Y$, $b \in Z$.

Dados $p, q \in Y \cup Z$, tenemos cuatro casos posibles.

Caso 1. $p \in Y$, $q \in Z$.

Idea de demostración.

Es fácil demostrar la proposición, si Y o Z es vacío.

Supongamos que $Y \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Elegimos $a \in Y$, $b \in Z$.

Dados $p, q \in Y \cup Z$, tenemos cuatro casos posibles.

Caso 1. $p \in Y$, $q \in Z$. En este caso

$$d(p, q) \leq d(p, a) + d(a, b) + d(b, q) \leq \ d(a, b) + \operatorname{diam}(Y) + \operatorname{diam}(Z).$$

Idea de demostración.

Es fácil demostrar la proposición, si Y o Z es vacío.

Supongamos que $Y \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Elegimos $a \in Y$, $b \in Z$.

Dados $p, q \in Y \cup Z$, tenemos cuatro casos posibles.

Caso 1. $p \in Y$, $q \in Z$. En este caso

$$d(p,q) \leq d(p,a) + d(a,b) + d(b,q) \leq d(a,b) + \operatorname{diam}(Y) + \operatorname{diam}(Z).$$

Ejercicio: considerar otros tres casos.

Idea de demostración.

Es fácil demostrar la proposición, si Y o Z es vacío.

Supongamos que $Y \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Elegimos $a \in Y$, $b \in Z$.

Dados $p, q \in Y \cup Z$, tenemos cuatro casos posibles.

Caso 1. $p \in Y$, $q \in Z$. En este caso

$$d(p,q) \leq d(p,a) + d(a,b) + d(b,q) \leq \; d(a,b) + \operatorname{diam}(Y) + \operatorname{diam}(Z).$$

Ejercicio: considerar otros tres casos.

Finalmente, concluimos que

$$\operatorname{diam}(Y \cup Z) \leq ???.$$

$\square$